Måling af produktivitet over tid – det metodiske grundlag for dynamisk benchmarking i DEA[1]

Af Ole B. Olesen og Niels Chr. Petersen

Resumé

Dynamisk benchmarking vedrører måling af ændringer i produktivitet over tid, som kan beskrives ved et Total Factor Productivity indeks. Dette indeks beskriver nettoeffekten af i) ændringer i best practice og ii) catching up effekten defineret som ændringen i den enkelte virksomheds positionering i forhold til best practice. I den foreliggende artikel beskrives, hvordan Data Envelopment Analysis kan benyttes til estimation af et Total Factor Productivity indeks, og hvordan dette indeks kan dekomponeres multiplikativt i to delkomponenter, der beskriver ændringer i best practice hhv. catching up effekter. Der gives en geometrisk intuition for dekomponeringen suppleret med et taleksempel og en mere matematisk stringent fremstilling.

I Indledning

'Most of us who use the governmental services do not need to be informed that productivity is low relative to that in the nongovernmental sector. Anyone who doubts this statement need only call on his personal experience with the mails during the last Christmas holiday season … We need not argue here whether the relatively low productivity in government employment is inherent in the technology of the goods and services supplied or stems from the motivation system for employees in government. The facts are that, for whatever reason, we witness the phenomenon of increasing productivity in the private sector of the economy alongside stationary or even declining productivity in the public sector.' (Buchanan, 1977)

Dette udsagn blev fremsat for nu mere end 25 år siden. Men den politiske debat i dagens Danmark afspejler, at diskussionen omkring offentlig versus privat udbud af serviceydelser stadig er aktuel og måske mere aktuel i dag end for 25 år siden. Der er eksempler på udlicitering af hjælp til ældre, man har i flere kommuner forsøgt udlicitering af opgaverne i forbindelse med børnepasning, der er etableret privatsygehuse, lige som dele af jernbanedriften er privatiseret. Diskussionen privat versus kollektivt udbud fortsætter således med udlicitering og outsourcing som hyppigt anvendte begreber i debatten.

Det traditionelle argument for, at private virksomheder er mere efficiente end offentlige, er, at førstnævnte agerer på et marked med konkurrence, mens sidstnævnte typisk ikke konkurrerer og ofte udgør et monopol. Dertil kommer, at værdien af både forbrugte ressourcer og producerede mængder opgøres i private virksomheders eksterne regnskab, som på den måde giver en stadig afspejling af den enkelte virksomheds situation. Den mulighed er ikke altid til stede i offentlige virksomheder, enten fordi værdien af de leverede ydelser ikke prissættes på et marked, eller fordi priserne p.g.a. monopoldannelser ikke afspejler værdien af de forbrugte ressourcer; sygehussektoren er et eksempel, hvor der ikke eksisterer priser for leverede ydelser. Endelig argumenteres nogle gange for, at produktiviteten i den private sektor er højere end i den offentlige, fordi beslutningstagerne i en privat virksomhed risikerer personlige tab, hvis virksomhedens situation forringes; indførelsen af den såkaldte 'Ny Løn'-ordning i den offentlige sektor i Danmark kan ses som et forsøg på introduktion af incitamentstrukturer, der har lighedspunkter til situationen i den private sektor.

'There are reasons to suspect that private ownership of supplying units may reduce the costs of providing local government services. … Private firms must meet the pressure of the marketplace. Inefficient firms can be under priced and driven out of business by more efficient firms. The case of a public firm is somewhat different. Government decision makers (especially tenured civil servants) have much less of their own wealth at stake in decisions made in governmental agencies. The average stockholder can monitor the activities of any firm in which he owns an interest by examining the firm's profit and loss statement. The owners of government enterprises (the electorate) are not provided with any such balance sheet.' (Spann, 1977)

Man kan være enig eller uenig i de anførte synspunkter. Men der er næppe uenighed om, at det er vanskeligt at måle efficiens og udvikling i produktivitet i en sektor, hvor der ikke findes priser på de ressourcer, der bruges, eller de ydelser, der leveres. Der er næppe heller tvivl om, at sandhedsværdien i en påstand om, at produktivitetsudviklingen i den offentlige sektor er lavere end i den private, er betinget af kvaliteten af de metoder, der har været brugt i den bagved liggende analyse.

Udviklingen af metoder til måling af efficiens og produktivitetsudvikling i sektorer, hvor der ikke findes markedspriser, eller hvor disse ikke afspejler de sande værdier af forbrugte ressourcer og leverede ydelser, har gennem de seneste 25 år påkaldt sig stor interesse. Indsatsen i forskningsverdenen har bl.a. resulteret i udvikling af den såkaldte Data Envelopment Analysis (DEA) metode. DEA gør det muligt at beregne efficiensen for hver enkelt af de virksomheder, der tilsammen udgør en sektor. DEA gør det også muligt at beregne udviklingen i produktivitet over tid og kan bl.a. bruges til beregning af et såkaldt Total Factor Productivity indeks, der kan dekomponeres multiplikativt i et mål for afstanden mellem to best practice frontiers f.eks. for to på hinanden følgende perioder og et mål for den relative ændring i den tekniske efficiens for den enhed, der aktuelt evalueres. Metoden gør det også muligt at teste, om en bestemt gruppe af virksomheder i en sektor er mere eller mindre efficiente end de øvrige; det er således f.eks. muligt at sammenligne efficiensen af offentligt vs. privat drevne virksomheder. Grundlaget for sådanne analyser er etablering af implicitte priser for hver virksomhed, der afspejler den information, der alternativt ville være indeholdt i et sæt markedspriser. Metoden er således også anvendelig i situationer, hvor der ikke eksisterer markedspriser.

Der er i litteraturen rapporteret mange anvendelser af DEA også i offentlig sektor regi, og metoden har i Danmark været anvendt eksempelvis inden for sygehussektoren. Kendskabet til metodens basale aspekter er således i dag rimeligt udbredt også blandt de relevante aktører i den offentlige sektor. Men dette er ikke tilfældet i relation til brugen af DEA til måling af produktivitetsudvikling over tid. Det er vores vurdering, at dette aspekt er vigtigt i en situation, hvor budgetterne for skattefinansierede sektorer i offentligt regi nogle gange reduceres i forventning om, at dette ikke vil resultere i en begrænsning i mængden af leverede ydelser. Ofte forventes det således at kunne følges op af en stigning i mængden af leverede ydelser, fordi effekterne af en budgetreduktion over tid kan kompenseres ved en produktivitetsstigning. Vi har derfor valgt at benytte den foreliggende lejlighed til en præsentation af mulighederne for at måle produktivitetsændringer over tid på basis af DEA.

En produktivitetsanalyse er orienteret imod sammenhængen mellem forbruget af ressourcer og det heraf resulterende præstationsniveau og resulterer typisk i dannelse af et sæt nøgletal. Nøgletallet for den enkelte virksomhed kan enten gives en fortolkning som *i)* et mål for afstanden mellem det faktisk observerede og best practice eller som *ii)* forholdet mellem et aggregeret outputmål, der typisk angiver værdien af den samlede produktion, og et aggregeret inputmål, der angiver de med denne produktion forbundne omkostninger. Tallet udtrykker i situation *i)* enten den mindste proportionale reduktion i inputs, der er nødvendig for at producere en bestemt mængde outputs ved best practice, eller den mindste proportionale tilvækst i outputs, der er nødvendig for at producere svarende til best practice. Nøgletallet er i situation *ii)* baseret på etablering af et sæt priser og kan fortolkes som værdien af produktionen pr. omkostningskrone.

DEA resulterer både i bestemmelse af sådanne nøgletal og hertil svarende bagvedliggende priser og i en identifikation af den såkaldte best practice frontier. DEA kan således gives en fortolkning som en procedure, der indebærer bestemmelse af vægte til aggregering af ressourcer og ydelser. Disse vægte afspejler værdien af det enkelte input eller output i forhold til alle øvrige inputs og outputs og kan derfor sammenlignes med et sæt priser. Forholdet mellem ethvert par af priser eller vægte kan for de produktive enheder gives en økonomisk fortolkning som marginale substitutionsrater. Vægtene afspejler derfor,

- hvordan sammensætningen af inputs kan ændres langs frontieren ved et givet output,
- hvordan sammensætningen af outputs kan ændres langs frontieren ved et givet input, og
- hvordan et input kan transformeres til et output.

Denne fortolkning af DEA-vægtene udgør kernen i brugen af metoden til måling af produktivitetsudvikling over tid i situationer med flere inputs og flere outputs. Ideen er, at DEA-vægtene gør det muligt at aggregere mange inputs til et endimensionalt omkostningsmål og mange outputs til et endimensionalt revenumål. Ændringen i produktiviteten fra en periode til en anden kan herefter f.eks. beregnes som den procentvise ændring i revenu pr. omkostningskrone over tid. Dette problemfelt er temaet i Afsnit II. Ændringer i produktivitet over tid kan beskrives i form af et Total Factor Productivity indeks, der afspejler nettoeffekten af to forhold, nemlig i) ændringer i best practice og ii) ændringer i den enkelte virksomheds positionering i forhold til best practice. Det er selvsagt af interesse at kunne måle, hvor stor en del af den samlede produktivitetsændring for en bestemt virksomhed eller for sektoren som helhed, der skyldes ændringer i best practice hhv. ændringer i den pågældende enheds egen position i forhold til best practice. Skyldes en produktivitetsstigning for et bestemt sygehus f.eks. alene, at der er indført ny teknologi i sektoren som sådan, eller er man også blevet bedre til at organisere sine aktiviteter? Dekomponering af et DEA-baseret Total Factor Productivity indeks i dets delkomponenter er temaet i Afsnit III, og denne dekomponering illustreres med et taleksempel i Afsnit IV. I Afsnit V fokuseres på standardfremgangsmåden til måling af produktivitetsændringer over tid ved hjælp af DEA baseret på beregning af det såkaldte Malmquist indeks; den formelle sammenhæng mellem DEA-metoden og det Total Factor Productivity indeks, der er præsenteret i Afsnit II, diskuteres i Appendix. Endelig sammenfattes og konkluderes i Afsnit VI.

Sandhedsværdien af analyser vedr. produktiviteten i den offentlige sektor er som allerede nævnt betinget af kvaliteten af de metoder, der har været brugt. Dette gælder selvsagt også analyser baseret på DEA-metoden. DEA har bl.a. været kritiseret for, at konsekvenserne af stokastisk støj i observerede data typisk ikke modelleres eksplicit, at de beregnede priser og efficiensmål af bl.a. den årsag kan være meget påvirkede af enkeltobservationer, og at anvendelse af metoden derfor kan være problematisk specielt i mindre datasæt. Især i den akademiske verden er nogle derfor af den opfattelse, at man bør bruge statistisk baserede metoder til benchmarking, og at Stochastic Frontier Analysis af den grund er et bedre metodisk udgangspunkt for benchmarking end DEA. Det stærkeste argument for brug af Stochastic Frontier Analysis er,

- at metoden med sit statistiske fundament tager udgangspunkt i, at observerede data er forbundet med usikkerhed og støj,
- at det statistiske fundament giver et metodisk grundlag for at kvantificere denne usikkerhed og dermed umiddelbar adgang til inferensestimater, og
- at et inferensestimat på sin side indebærer mulighed for estimation af f.eks. konfidensintervaller for de estimerede efficiensindekser frem for blot punktestimater.

Vi er meget enige i, at Stochastic Frontier Analysis har disse styrker, men prisen er, at der må introduceres stærke og i en vis forstand typisk arbitrære fordelingsantagelser for både støj i data og variationen i efficiens de evaluerede enheder imellem. Hertil kommer, at DEA kan gives et statistisk fundament (Banker (1993), hvis man antager at de observerede data er uden støj. Specielt gælder,

- at DEA kan vises at resultere i konsistente efficiensestimater,
- at konvergensraten for disse estimater kan bestemmes analytisk (Korostelev et. al. 1995),
- at DEA giver mulighed for statistisk baseret test af hypoteser (Banker 1996), og
- at der ved anvendelse af bootstrapping kan konstrueres konfidensintervaller for de estimerede indekser (Simar og Wilson 1998).

Det skal dog understreges, at den empiriske fordeling af DEA-estimatoren for teknisk efficiens alene indebærer en asymptotisk afdækning af den underliggende sande fordeling, og at brugen af DEA specielt på empiriske datasæt med et begrænset antal observationer og/eller relativt mange inputs og outputs derfor ikke er uproblematisk. Mange statistikere vil mene, at bootstrapping i forhold til metoder baseret på et passende valgt sæt af eksplicitte fordelingsantagelser er underlagt egne iboende begrænsninger (se f.eks. Horrace og Schmidt 1996).

En yderligere diskussion af metodens styrker og svagheder ligger uden for denne artikels rammer. Den interesserede læser henvises til (Coelli et al. 1998). Vi er af den opfattelse, at DEA er det mindst ringe alternativ som et værktøj i en benchmarking proces, en holdning der understøttes af det efterhånden meget store antal eksempler på praktiske anvendelser af metoden, som er rapporteret i litteraturen. Der findes også en række danske eksempler på benchmarking baseret på DEA; forfatterne til denne artikel har selv været involveret i flere af disse. Men hovedparten af disse analyser har enten været baseret på data for en enkelt periode eller har involveret en simpel beregning af produktivitetsudviklingen over tid i form af et sæt Malmquist-indekser. De muligheder, DEA indebærer i relation til dynamisk benchmarking, har kun i meget begrænset omfang været anvendt i de danske analyser. I den foreliggende artikel fokuseres derfor på en præsentation af netop det aspekt af DEA metoden.

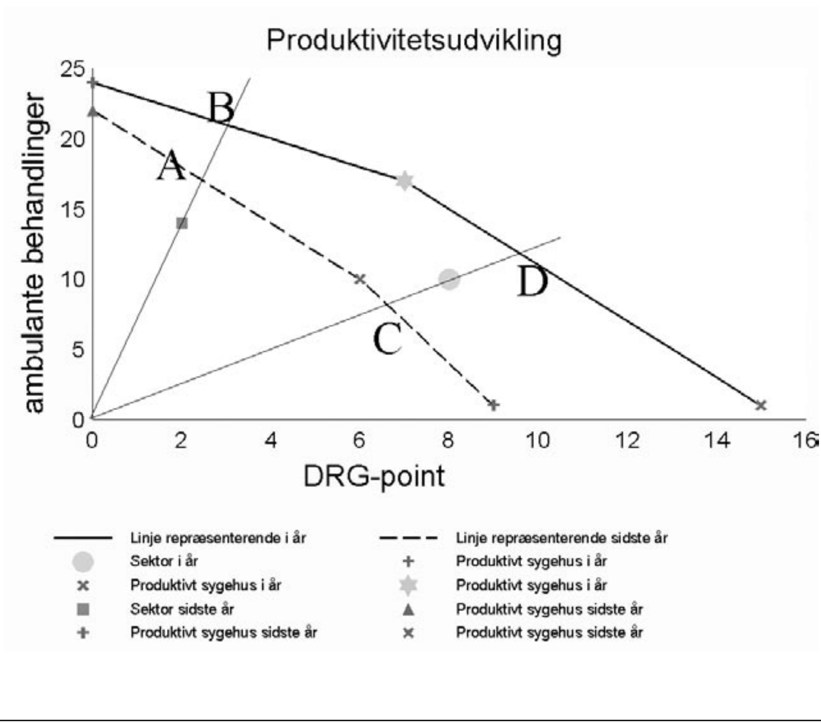
II Brug af DEA-vægte til måling af produktivitetsudvikling over tid i situationen med flere inputs og flere outputs

Nedenfor vil blive beskrevet en metode til måling af produktivitetsudviklingen over tid for både en sektor og de enkelte virksomheder, der tilsammen udgør denne. Både beskrivelsen og det efterfølgende taleksempel er baseret på situationen, hvor mange inputs og outputs er aggregeret til et enkelt input og et enkelt output. Det svarer til, at et sæt DEA-vægte på forhånd er brugt til at bestemme en passende aggregering. Fokus er på en diskussion af, hvordan et sæt DEA-vægte mere præcist bruges til aggregeringsformål.

Lad os forestille os en sygehussektor bestående af fem sygehuse, som producerer to outputs ved anvendelse af et input: de samlede omkostninger, og lad os tage udgangspunkt i en situation, hvor vi har data fra sidste år og i år. Da vi søger et mål for væksten i produktiviteten for hele sektoren, danner vi nu to yderligere observationer svarende til aktiviteten i hele sektoren: sektorens totale output af hver af de to typer i år henholdsvis sidste år og de tilsvarende totale omkostninger i sektoren. Vi beregner altså den samlede aktivitet fra alle sygehusene sidste år og i år, dvs. summen af alle omkostninger og af outputs af de to typer. Disse to outputs kunne f.eks. være værdiproduktet af stationære behandlinger målt ved DRG-point og antallet af ambulante "standard"-behandlinger.

Nu vil vi gerne have observationerne fra de fem sygehuse og de 2 observationer for sektoren som helhed gjort sammenlignelige. Det gør vi ved at reskalere[2] observationerne for hvert år, dvs. vi ganger med et passende tal, så omkostningerne for alle observationer ned- eller opskaleres til 100.000 kr. Efter reskaleringen af omkostninger og de tilhørende to outputs for hvert sygehus for i år og sidste år kan vi indtegne de fem output-kombinationer fra de fem sygehuse i et såkaldt outputisokvant-diagram med antal DRG-points ud ad den vandrette akse og antal ambulante behandlinger op ad den lodrette. Når de

Figur 1. Eksempel på produktivitetsudviklingen for sygehussektoren.



5 punkter for et givet år er indtegnet, kan de indhylles fra oven. Denne proces er i Figur 1 (Se side 65) foretaget både for observationerne fra sidste år og fra i år. Det er i figuren antaget, at der i begge perioder kun er tre sygehuse på randen af indhyllingen. Punkter, der ikke ligger på randen af isokvanten, er udeladt i tegningen, da de ikke bidrager med information vedr. isokvantens beliggenhed. Endelig er observationen, der repræsenterer den samlede sektor, indtegnet både for i år og sidste år (den vil aldrig bidrage til udspænding af isokvanten, fordi den per konstruktion er et gennemsnit af allerede indtegnede punkter).

Hvordan kan et mål for væksten i produktiviteten for hele sektoren nu beregnes ud fra Figur 1? Hvis vi havde priser på de to outputs, så behøvede vi slet ikke Figur 1. Vi kunne i den situation beregne værdien af sektorens output per 100.000 kr. omkostninger i år og sidste år og dermed fremskaffe et mål for, hvor meget værdien af output per omkostningskrone er steget. Sagt med andre ord, hvis output fra sygehuset kunne repræsenteres som et tal, så ville det være meget simpelt at fremskaffe et mål for væksten i produktiviteten.

I virkelighedens verden har vi ikke adgang til en sådan pris på de to outputs, men vi kan anvende outputisokvanten til at fremskaffe denne prisinformation. Vi kan med andre ord lade data fra de sygehuse, der ligger på isokvanten (dvs. de produktive sygehuse) bestemme priser. I Figur 1 er der tegnet to rette linjer gennem nulpunktet i diagrammet og sektorens aktivitet i de to år (reskaleret til omkostningsniveau 100.000 kr.). Disse to rette linjer skærer isokvanterne fra i år og fra sidste år i punkterne B, D og A,C. Disse fire punkter ligger på nogle segmenter af isokvanterne, dvs. på nogle linjestykker, der har en bestemt hældning. F.eks. ligger A på et linjestykke med hældningen -2. Hældningen på disse linjestykker kan fortolkes som produktive substitutionsrater mellem de to outputs, DRG-points og ambulante "standard"-behandlinger. I punktet A, hvor hældningen altså er -2, kan en enhed af outputtet DRG-points altså substitueres for 2 enheder af det andet output, ambulante "standard"-behandlinger. Den relative pris mellem de to output er altså her 2/1. I Figur 1 kan vi se, at den relative pris svarende til punkterne A og B er henholdsvis 2 og 3, mens den relative pris svarende til C og D er 1 og 2.

Vi anvender nu de to relative priser bestemt af de observerede aktiviteter på de produktive sygehuse sidste år, dvs. priserne svarende til punkterne A og C, til at beregne værdien af sektorobservationen sidste år og i år. Den relative pris, der skal anvendes til bestemmelse af værdien af sektorens output sidste år er 2/1, fordi strålen gennem nulpunktet og sektorens aktivitet sidste år skærer isokvanten i punktet A. Tilsvarende er den relative pris, der skal anvendes til bestemmelse af værdien af sektorens output i år 3/1, fordi strålen gennem nulpunktet og sektorens aktivitet i år skærer isokvanten i punktet C. Bemærk her, at vi vælger priser svarende til fast isokvant (her baseret på aktiviteten sidste år), men at vi lige så godt kunne vælge isokvanten for i år, d.v.s. punkterne B og D.

De relative priser 2/1 og 3/1 fra A og C anvendes nu til at beregne et mål for værdien af sektorens aktivitet sidste år og i år. Væksten i værdien af sektorens output per 100.000 omkostningskroner fra sidste år og til i år kan efterfølgende beregnes, selvom de to relative priser 2/1 og 3/1 ikke er umiddelbart sammenlignelige. Som Figur 1 er tegnet, er sektorens output sidste år (2,14) og i år (8,10). Lad os vælge at værdisætte sidste års output som:

$2 \times 2 + 1 \times 14 = 18$

Ved at vælge priserne (2,1) for de to outputs sidste år har vi nu ud over de relative priser også fastlagt et prisniveau. Et andet prisniveau ville fremkomme, hvis vi i stedet valgte priserne (1,½), som jo stadig repræsenterer en relativ pris på 2/1. Da vi udelukkende er interesserede i væksten af værdien fra sidste år til i år, er valget af niveau uden betydning. Men det er her vigtigt at vælge prisvektoren svarende til den relative pris på 3/1 i punktet C, så priserne har samme niveau som den valgte prisvektor (2,1) svarende til punktet A. Hvad vil samme niveau sige i denne sammenhæng? Betragt det sygehus, der er beliggende i punktet (6,10) i Figur 1. Dette sygehus er beliggende på isokvanten og er dermed produktivt. Da sygehuset er placeret i et hjørnepunkt, der har kontakt til både substitutionsraterne i A og i C, kan vi se, at output fra dette sygehus enten kan vurderes ved de relative priser 2/1 eller de relative priser på 3/1. Værdien af sygehusets output (6,10) skal selvfølgelig være den samme uanset om det ene eller det andet sæt af priser anvendes. Værdien af output er 22 ved priserne (2,1) og 28 ved priserne (3,1). For at få samme værdi ved de to sæt af priser må vi enten skalere prisvektoren (3,1) ned med faktoren $\frac{22}{28}$ eller skalere prisvektoren (2,1) op med faktoren $\frac{28}{22}$. Som nævnt er det væksten i værdien, vi er interesserede i at måle, så hvilket niveau, vi vælger, er uden betydning. Vi vælger her at skalere prisvektoren (3,1) ned, så priserne anvendt til beregning af værdien af sektorens output på (2,14) sidste år og (8,10) i år er (2,1) og $(3\times\frac{22}{28},\ \frac{22}{28})$. Forholdet mellem værdierne af outputs i år og sidste år bliver dermed:[3]

$$\frac{3\times\frac{22}{28}\times 8+\frac{22}{28}\times 10}{2\times 2+1\times 14}=\frac{\frac{34\times 22}{28}}{18}\approx\frac{26.71}{18}\approx 1.4841$$

og den procentvise produktivitetsvækst kan derfor beregnes som $1.4841-1=0.4841$ svarende til en vækst på ca. 48 procent.

Vi har her målt værdien af sektorens output med teknologien sidste år som benchmark. Vi kunne have lavet præcis samme ræsonnement med teknologien i indeværende år som benchmark. Det ville betyde et valg af relative priser svarende til hældningen på isokvanten fra i år i B og D, dvs. relative priser på 1/1 og 2/1. Værdien af output for det sygehus, der i figuren definerer skæringspunktet mellem de to isokvantsegmenter svarende til teknologien i år, dvs. punktet (7, 18), skal være den samme, uanset om den beregnes til priserne i B eller i D. Hvis vi vælger priser (1,1) og (2,1) svarende til punkterne B og D, vil værdien af output fra dette sygehus (7,18) være h.h.v. 25 og 32. Så for at få samme værdi ved de to sæt af priser må vi enten skalere prisvektoren (2,1) ned med faktoren 25/32 eller skalere prisvektoren (1,1) op med faktoren $\frac{32}{25}$.

Vi vælger at nedskalere prisvektoren (2,1) med faktoren $\frac{25}{32}$, så priserne anvendt til beregning af værdien af sektorens output på (2,14) sidste år og (8,10) i år er (1,1) og $\left(2\times\frac{25}{32},\frac{25}{32}\right)$. Forholdet mellem værdierne af outputs i år og sidste år bliver dermed:

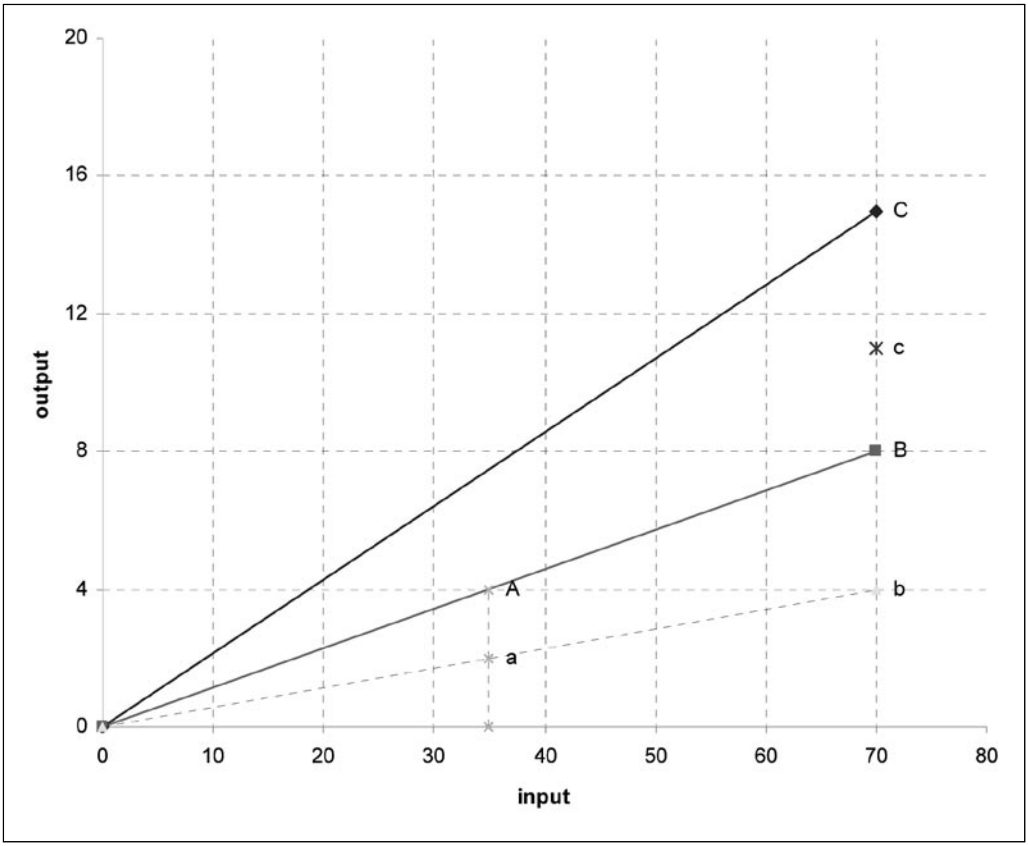
$$\frac{2\times\frac{25}{32}\times 8+1\times\frac{25}{32}\times 10}{1\times 2+1\times 14}=\frac{\frac{26\times 25}{32}}{16}\approx\frac{20.31}{16}\approx 1.2695$$

og den procentvise produktivitetsvækst kan beregnes som $1.2695-1=0.2695$ svarende til en vækst på ca. 27 procent.

Beregningen af produktivitetsstigningen varierer altså afhængig af, om vi vælger teknologien sidste år eller i år som benchmark. Vi får altså ikke et entydigt mål for væksten og må nøjes med at konstatere, at væksten fra sidste år til i år ligger mellem 27% og 48%. Alternativt kan man tage et gennemsnit af de to vækstmål. Typisk vælges her et geometrisk gennemsnit, så vi har fået bestemt en gennemsnitlig produktivitetstilvækst på $\sqrt{27\times 48}\%=36\%$. Og dette er jvf. Afsnit V præcis, hvad der sker ved beregning af et Malmquist-indeks.

III Metode til beregning af produktivitets-udvikling over tid

Produktivitetsudvikling over tid har både noget at gøre med sygehusenes evne til at udnytte teknologiske fremskridt og deres evne til at forbedre deres produktivitet i forhold til alle andre sygehuse. For fast tid taler vi om sygehusets efficiens, som er et relativt mål for, hvor godt det klarer sig. Et sygehus betegnes som efficient, *Figur 2. Produktivitetsudviklingen over to perioder.*



hvis der produceres så mange udskrevne patienter til så lave omkostninger, at ingen af de andre sygehuse kan gøre det bedre. Efficiensens udvikling over tid benævnes produktivitetsudviklingen og kan både påvirkes af sygehusets evne til at klare sig godt i forhold til sektoren som sådan for fast tid og af sygehusets evne til at realisere forbedringen i form af udnyttelsen af teknologiudviklingen. Hvis udviklingen i produktivitet for et specifikt sygehus viser en faldende tendens, så kan dette skyldes en kombination af, *i)* at sygehuset er blevet dårligere til at opretholde sin position (sin efficiens) i forhold til resten af sektoren, og *ii)* at sygehuset ikke har været så godt som resten af sektoren til at udnytte potentialet i den teknologiske udvikling. Vi vil i det følgende beskrive en metode, der gør det muligt at analysere dette problemfelt.

I Figur 2 repræsenterer den nederste linie 0A-> best practice i periode 0 og den øverste 0C-> best practice i periode 1. Best practice frontieren er altså løftet fra periode 0 til periode 1, og det betyder, at der er sket en produktivitetsstigning. Punktet A svarer til det observerede forbrug af ressourcer og det hertil svarende præstationsniveau for en efficient enhed i periode 0. C svarer på samme måde til forbruget af ressourcer og det hertil svarende præstationsniveau for samme enhed, men nu i periode 1. Enheden er altså efficient i begge perioder, men der produceres mere og bruges flere ressourcer i periode 1 end i periode 0. Best practice er forbedret fra periode 0 til periode 1, fordi et givet forbrug af ressourcer i periode 1 resulterer i et højere præstationsniveau i forhold til situationen i periode 0. Ændringen i best practice repræsenteret ved et mål for afstanden mellem de to linier er et simpelt mål for produktivitetsudviklingen fra periode 0 til periode 1.

Denne ændring kan operationaliseres ved først at gøre de to observationer mere sammenlignelige ved en flytning af forbruget af ressourcer i periode 0 til niveauet for periode 1 for efterfølgende at vurdere den resulterende produktion givet at såvel teknologien som graden af inefficiens er som i periode 0. Dette resulterer i punkt B i Figur 2, fordi enheden var efficient i periode 0, og fordi linien 0A-> repræsenterer best practice i periode 0. Afstanden mellem punkterne B og C udgør nu et mål for produktivitetsændringen fra periode 0 til periode 1.

Situationen bliver lidt mere kompliceret, hvis vi i stedet betragter en enhed, der er teknisk inefficient i både periode 0 og periode 1.

Observationerne for en sådan inefficient enhed er markeret ved punkt a i periode 0 og punkt c i periode 1. b angiver det præstationsniveau, der ville være observeret, hvis forbruget af ressourcer i periode 1 var blevet brugt ved teknologien i periode 0 givet den i periode 0 observerede grad af inefficiens. Punkterne A, B og C svarer til best practice, dvs. de tilsvarende efficiente aktiviteter. Ændringen i produktivitet for det inefficiente sygehus er repræsenteret ved afstanden bc. Men denne ændring kan (under visse antagelser) nu splittes i 2 deleffekter, en der skyldes flytningen i best practice frontieren, og en der skyldes, at enheden selv kan have skiftet position i forhold til best practice fra periode 0 til periode 1, dvs. i periode 1 være placeret tættere på eller længere fra periodens best practice i forhold til situationen i periode 0; enheden kan altså være blevet mere eller mindre teknisk efficient.

Afstanden BC er et mål for ændringen i best practice. Afstanden (Bb — Cc) er tilsvarende et mål for ændringen i afstanden til best practice; hvis enheden i periode 1 er tættere på best practice i periode 1 i forhold til situationen i periode 0, d.v.s. hvis Cc er mindre end Bb, så er dens tekniske efficiens forbedret fra periode 0 til periode 1.

Figur 2 er oprindeligt foreslået af (Nishimu et al. 1982). Her måles både forbrug af ressourcer og præstationsniveau i logaritmisk skala, og det antages, at der hverken foreligger stordriftsfordele eller -ulemper. Afstanden bc er et mål for den totale ændring i enhedens produktivitet fra periode 0 til periode 1, og den kan splittes i en effekt fremkaldt af ændringen i best practice og en anden fremkaldt af en evt. ændring i enhedens position i forhold til best practice, idet

(1) $Cc + bc = BC + Bb$

som indebærer

(2) $bc = BC + (Bb - Cc)$

Den samlede produktivitetsændring bc kan altså dekomponeres i 2 delkomponenter:

i)	BC	- >	ændring i best practice frontieren selv
ii	Bb — Cc	- >	den relative ændring i enhedens afstand fra best practice

Den relative ændring i enhedens placering i forhold til best practice, Bb — Cc, betegnes ofte catching up effekten.

Hermed er beskrevet et metodisk udgangspunkt for måling af produktivitetsændringer over tid. Dekomponeringen defineret ved (2) har en meget tæt relation til Farrell's efficiensmål, der på sin side har en tilsvarende tæt relation til DEA-modellen. Det betyder, at DEA gør det muligt at vurdere produktivitetsændringer over tid. Det vises i Appendix, at ændringen i produktivitet målt ved afstanden bc (efter en logaritmisk transformation) kan skrives som et Total Factor Productivity (TFP) indeks defineret ved forholdet mellem de to Farrell-mål E_{01} og E_{00}, der måler produktiviteten for observationerne i periode 1 og 0 i forhold til best practice i periode 0:

$$(3)\ \text{TFP} = \frac{E_{01}}{E_{00}}$$

TFP definerer et mål for enhedens produktivitet i periode 1 i forhold til dens produktivitet i periode 0, idet begge observationer evalueres i forhold til samme best practice teknologi, nemlig den for periode 0. Det fremgår også af Appendix, at TFP kan dekomponeres multiplikativt:

$$(4)\qquad \text{TFP} = \frac{E_{01}}{E_{11}} \cdot \frac{E_{11}}{E_{00}} \left(= \frac{E_{01}}{E_{00}} \right)$$

Her angiver $\frac{E_{01}}{E_{11}}$ et mål for afstanden mellem de to best practice frontiers baseret på observationen for periode 1, mens $\frac{E_{11}}{E_{00}}$ er et mål for den relative ændring i den tekniske efficiens fra periode 0 til periode 1 for den enhed, der evalueres, d.v.s. den såkaldte catching up effekt.

IV Et numerisk eksempel

Lad os med udgangspunkt i et lille eksempel beregne produktivitetsudviklingen over tid for såvel efficiente som inefficiente sygehuse. Lad fire sygehuse producere et antal udskrivninger i periode 0 og periode 1 som beskrevet i Tabel 1.

I Figur 3 (Se side 71) er disse data tegnet ind i et input-output diagram sammen med to rette linjer med hældning 1 og med hældning 3 (svarende til konstant skalaafkast-teknologier til tid 0 og tid 1). Bemærk at Sygehus 1 er efficient tid 0 men inefficient tid 1, at sygehus 2 er inefficient tid 0 og efficient tid 1, at sygehus 3 er inefficient i begge perioder og at sygehus 4 er efficient i begge perioder.

Et almindeligt anvendt mål for graden af inefficiens for fast tid er den mulige procentvise forøgelse af output (udskrivninger). Betragter vi f.eks. sygehus 3, som i periode 0 producerer 3 udskrivninger med omkostninger på 5000 kr., så burde sygehuset være i stand til at producere 5 udskrivninger, da den efficiente udskrivningspris i periode 0 er 1000 kr per udskrivning (hældningen på teknologifrontieren i periode 0 er 1). Tilsvarende producerer sygehus 3 i periode 1 16 udskrivninger med et ressourceforbrug på 6000 kr. Den efficiente udskrivningspris i periode 1 er 333 kr, (hældningen på frontieren er 3), så sygehuset burde kunne producere 18 udskrivninger. Den mulige procentvise forøgelse af udskrivningerne i de to perioder er således:

efficiensindeks sygehus 3 periode 0:

$$\frac{\text{det mulige antal udskrivninger tid 0}}{\text{det faktisk producerede antal udskrivninger tid 0}} = \frac{5}{3} = 1.666$$

efficiensindeks sygehus 3 periode 1

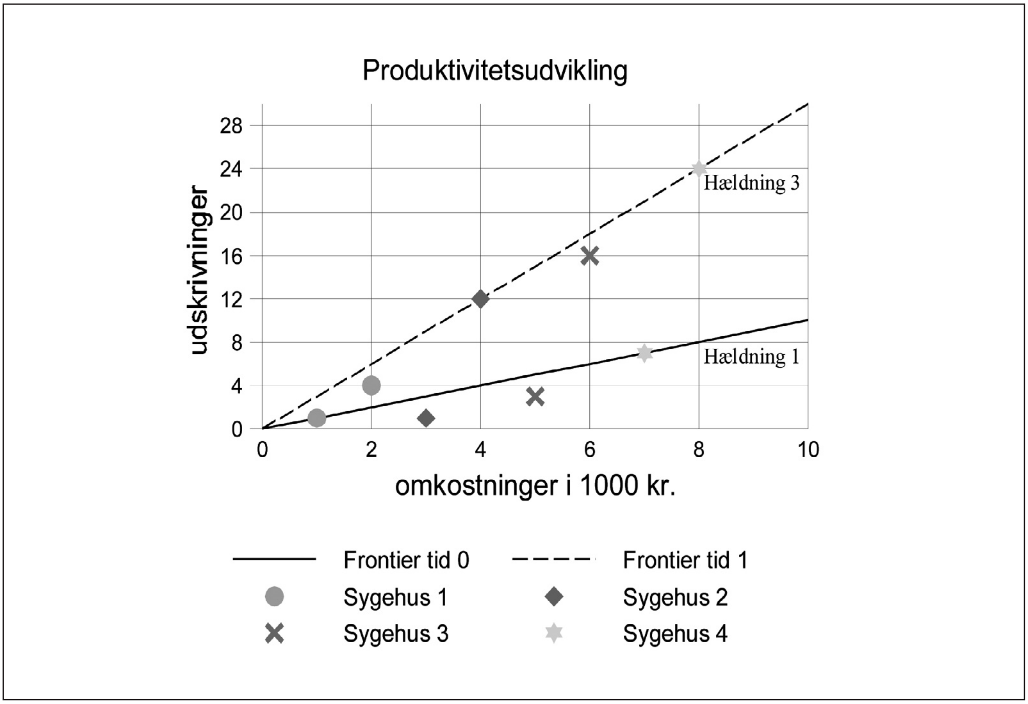
$$\frac{\text{det mulige antal udskrivninger tid 1}}{\text{det faktisk producerede antal udskrivninger tid 1}} = \frac{18}{16} = 1.125$$

Disse to indeks udtrykker, at en $66\frac{2}{3}$ (12.5) procent forøgelse af antallet af udskrivninger burde være mulig for sygehus 3 i periode 0 (periode 1).

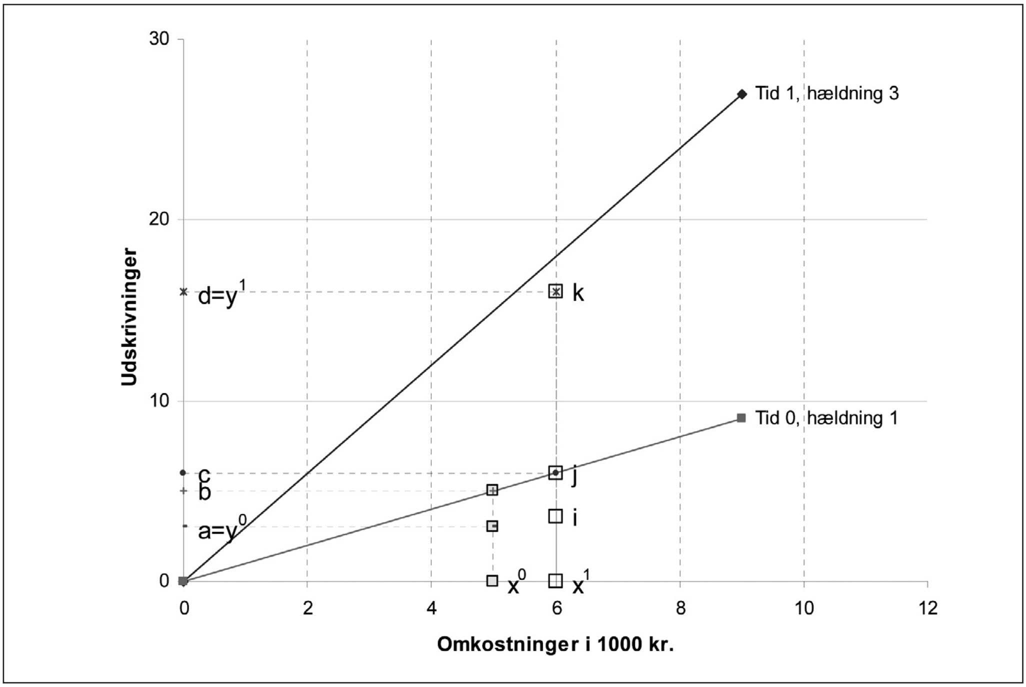
Tabel 1. Input og output fra 4 sygehuse i periode 0 og periode 1.

	Periode 0		Periode 1	
	omkostninger x^0	udskrivninger y^0	omkostninger x^1	udskrivninger y^1
Sygehus 1	1	1	2	4
Sygehus 2	3	1	4	12
Sygehus 3	5	3	6	16
Sygehus 4	7	7	8	24

Figur 3. Eksempel på produktivitetsudviklingen for fire sygehuse.



Figur 4. Produktivitetsudviklingen for Sygehus 3.



Lad os med udgangspunkt i Figur 4 (Se side 71) beregne produktivitetsudviklingen for sygehus 3 for perioden fra tid 0 til tid 1. Sygehus 3 har til tid 0 et output niveau på 3 til omkostninger på 5000 kr. For at få et mål for produktivitetsændringen fra tid 0 til tid 1 vil vi gerne kunne sige noget om sygehusets <u>hypotetiske</u> outputniveau til tid 0, hvis sygehuset anvendte de 6000 kr., som er sygehusets omkostningsniveau til 1 og arbejdede til samme efficiensforhold som til tid 0. Da vi har antaget konstant skalaafkast, følger det, at dette hypotetiske outputniveau er 3/5 x 6 = 3.6 udskrivninger, markeret som punktet "i" i Figur 4. Bemærk, at inefficiensen af (5,3), målt ovenfor som 5/3, svarende til den mulige opskalering af outputniveauet 3, er identisk med inefficiensen af det hypotetiske ouputniveau 3.6, idet $\frac{5}{3}\times 3 = 5$ og $\frac{5}{3}\times 3.6 = 6$ og både (5,5) og (6,6) ligger på frontieren.

Produktivitetsudviklingen for sygehus 3 er nu forskellen mellem outputniveauet på 16 udskrivninger til tid 1 og det hypotetiske outputniveau på 3.6 udskrivninger til tid 0. Der er altså til samme omkostningsniveau præsteret til tid 1 yderligere 12.4 udskrivninger eller $\frac{16}{3.6} = \frac{40}{9}$ gange som mange som til tid 0. Vi tildeler derfor sygehus 3 et produktivitetsindeks på $\frac{y^1}{y^0(x^1)} = \frac{16}{3.6} = 4.444$, hvor vi med $y^0(x^1)$ har angivet det hypotetiske outputniveau på 3.6 til tid 0 hvis sygehuset anvendte x^1 = 6000 kr., som er sygehusets omkostningsniveau i periode 1. I litteraturen benævnes produktivitetsindekset $\frac{y^1}{y^0(x^1)}$ ofte *Total Factor Productivity* (TFP)[4].

Det er som tidligere nævnt ofte af interesse at få afklaret, hvor stor en del af produktivitetsændringen, der skyldes, at enheden selv er blevet bedre i stand til at udnytte sit eget teknologiske potentiale, og hvor stor en del, der kan henføres til ændringer i de teknologiske muligheder for sektoren som sådan. Vi vil med andre ord gerne dekomponere det samlede *Total Factor Productivity* indeks i to komponenter, som hver angiver størrelsen af disse to forhold.

Lad os angive det til tid 0 mulige efficiente antal udskrivninger som $y^0(f^0) = 6$ og tilsvarende det til tid 1 mulige efficiente antal udskrivninger som $y^1(f^1) = 18$. Lad os endvidere angive det til tid 0 mulige efficiente antal udskrivninger svarende til det <u>hypotetiske</u> outputniveau på 6 til tid 0 hvis sygehuset anvendte x^1 = 6000 kr. som $y^1(f^0) = 6$. $y^k(f^l)$ er altså outputniveauet til tid *k* på frontieren til tid *l*. I Figur 4 er $(x^1, y^0(x^1)) = (6, 3.6)$ angivet med "i", $(x^1, y^0(f^0)) = (6,6)$ med "j" og endelig er $(x^1, y^1) = (6,16)$ angivet med "k"

Vi kan nu dekomponere $\frac{y^1}{y^0(x^1)}$ på følgende vis

$$TFP \equiv \frac{y^1}{y^0(x^1)} = \frac{y^1(f^1)}{y^1(f^0)} \times \left(\frac{y^1}{y^1(f^1)} \Big/ \frac{y^0(x^1)}{y^1(f^0)} \right) \equiv \Delta F \times CU$$

Tabel 2. Total Factor Productivity (TFP) produktivitetsindeks for de 4 sygehuse.

	produktivitetsindeks: $\frac{y^1}{y^0(x^1)}$
Sygehus 1	$\frac{4}{2} = 2$
Sygehus 2	$\frac{12}{\frac{4}{3}} = 9$
Sygehus 3	$\frac{16}{3.6} = 4.444$
Sygehus 4	$\frac{24}{8} = 3$

Tabel 3. Dekomponering af TFP indeks for de 4 sygehuse.

	TFP indeks: $\frac{y^1}{y^0(x^1)}$	ΔF indeks: $\frac{y^1(f^1)}{y^1(f^0)}$	$\frac{\frac{y^1}{y^1(f^1)}}{\frac{y^0(x^1)}{y^1(f^0)}}$
Sygehus 1	$\frac{4}{2}=2$	$\frac{6}{2}=3$	$\frac{4}{6}/\frac{2}{2}=\frac{2}{3}$
Sygehus 2	$\frac{12}{\frac{4}{3}}=9$	$\frac{12}{4}=3$	$\frac{12}{12}/\frac{\frac{4}{3}}{4}=3$
Sygehus 3	$\frac{16}{3.6}=4.444$	$\frac{18}{6}=3$	$\frac{16}{18}/\frac{3.6}{6}=1.48$
Sygehus 4	$\frac{24}{8}=3$	$\frac{24}{8}=3$	$\frac{24}{24}/\frac{8}{8}=1$

Det første led efter lighedstegnet $\frac{y^1(f^1)}{y^1(f^0)}=\Delta F$ måler ændringen i frontieren/teknologien. For sygehus 3 er denne størrelse $\Delta F=\frac{18}{6}=3$ og svarer til, at hældningen på frontieren til tid 1 er tre gange hældningen til tid 0. Det andet led CU måler <u>den relative bevægelse af sygehus 3 mod frontiererne</u>. For sygehus 3 er denne størrelse $CU=\frac{16}{18}/\frac{4}{6}=\frac{0{,}888}{0{,}666}=1.333$. Når denne størrelse er større end en, betyder det, at sygehus 3 til tid 1 er tættere på "sin" frontier end til tid 0. Sygehuset er således blevet bedre i stand til at udnytte sit eget teknologiske potentiale. For alle 4 sygehuse får vi en dekomponering af TFP i ΔF og CU som vist i Tabel 3.

Bemærk, at som nævnt i fodnote 4 kan vi i det simple tilfælde med et input og et output beregne TFP-indekset mere enkelt som ratiet mellem output-input forholdene i periode 1 og periode 0. Når vi yderligere antager konstant skalaafkast og dermed har, at ΔF indekset er konstant, så kan CU indekset beregnes mere enkelt som den skalar, der skal ganges på ΔF indekset (lig 3) for at få TFP-indekset, eller

$(CU-indeks)\times 3=(TFP-indeks)$, da $\Delta F=3$ for alle fire sygehuse

V Malmquist-indekset

(Caves et al. 1982) foreslår en mere simpel og direkte måde til beregning af produktiviteten. Metoden bygger på en beregning af den hypotetiske efficiens, som fremkommer ved at vurdere sygehusets produktion i periode 1 relativt til teknologien i periode 0. Vi beregner med andre ord den mulige ændring af antallet af udskrivninger i periode 1 som ville fremkomme hvis sygehuset i periode 1 producerede efficient <u>til periode 0's teknologi</u>[5].

Denne hypotetiske "kryds-teknologi" produktivitet beregnes for sygehus 3 i Figur 3 som:

$$\frac{\text{det mulige antal udskrivninger tid 0 ved de i tid 1 anvendte ressourcer}}{\text{det faktisk producerede antal udskrivninger tid 1}}$$

$$\frac{y^1\ f^0}{y^1}=\frac{0c}{0d}=\frac{6}{16}\approx 0.375$$

TFP-produktivitetsindekset for sygehus 3 fremkommer nu på en alternativ måde som:

$$\frac{\left(\frac{\text{det faktisk producerede antal udskrivninger tid 1}}{\text{det mulige antal udskrivninger tid 0 ved de i tid 1 anvendte ressourcer}}\right)}{\left(\frac{\text{det faktisk producerede antal udskrivninger tid 0}}{\text{det mulige antal udskrivninger tid 0}}\right)}=$$

$$\frac{y^1}{y^1(f^0)}/\frac{y^0}{y^0(f^0)}=\left(\frac{0d}{0c}/\frac{0a}{0b}\right)=\left(\frac{16}{6}/\frac{3}{5}\right)=\frac{40}{9}\approx 4.444$$

Vi får samme indeks som ovenfor, fordi $y^0(x^1) \equiv y^1(f^0)\frac{y^0}{y^0(f^0)}$. Som før kan produktivitetsindekset dekomponeres i en ΔF og en CU effekt.

Denne mere direkte måde til beregning af produktivitetsændringer over tid er den grundlæggende ide i det såkaldte Malmquist-indeks. Malmquist-indekset med best practice i periode *i* = 0, 1 som bencmark defineres i termer af forholdet mellem to Farrell-mål:

$$(5)\quad M_i^s = \frac{E_{i1}^s}{E_{i0}^s}, i = 0,1, s = \text{input}, \text{output}$$

(5) afspejler, at Malmquist-indekset kan defineres med best practice i enten periode 0 eller periode 1 som benchmark, og at det (ligesom DEA-indekset) kan defineres enten input- eller output-orienteret. TFP-indekset i (3) er specialtilfældet af (5) baseret på et outputorienteret efficiensmål, d.v.s. s = output, og med best practice i periode 0 som benchmarkteknologi, dvs. *i* = 0. Dekomponeringen af TFP-indekset i en komponent, der afspejler ændringen i best practice, og en catching up effekt, der afspejler den relative ændring i enhedens tekniske efficiens, holder også for Malmquist-indekset:

$$(6)\quad M_i^s = \frac{E_{i1}^s}{E_{jj}^s} \cdot \frac{E_{jj}^s}{E_{i0}} \left(= \frac{E_{i1}^s}{E_{i0}^s} \right), i, j = 0,1, i \neq j, s = \text{input}, \text{output}$$

$\frac{E_{i1}^s}{E_{jj}^s}$ angiver ændringen i best practice og $\frac{E_{jj}^s}{E_{i0}^s}$ catching up effekten hvis *i* = 1. Bemærk at dekomponeringen er mulig for både det input og det output orienterede Malmquist-indeks. (4) er specialtilfældet af (6) med *i* = 0, *j* = 1 og s = output. Bemærk også, at beregningen af M_i^s defineret ved (5) alene forudsætter kendskab til best practice teknologien i benchmark perioden, og at værdien af M_i^s afhænger af valget af benchmark periode, mens dekomponeringen i (6) forudsætter kendskab til best practice i både periode 0 og periode 1.

(Färe et al. 1992) vælger at definere Malmquist-indekset som den geometriske middelværdi af de to indekser, der fås ved ændring af benchmark perioden:

$$(7)\quad M^s = \sqrt{M_0^s M_1^s} = \frac{E_{11}^s}{E_{00}^s}\sqrt{\frac{E_{00}^s}{E_{10}^s} \cdot \frac{E_{01}^s}{E_{11}^s}}, s = \text{input}, \text{output}$$

Catching up komponenten er den samme som i (6), men komponenten svarende til ændringen i best practice er nu det geometriske gennemsnit af afstandene mellem best practice for observationerne i periode 0 og periode 1. Førsund (1994) observerer, i) at Färe et al. (1992) refererer til Caves et al. (1982) som begrundelse for at arbejde med det geometriske gennemsnit i (7), ii) at Caves et al. (1982) introducerer en geometrisk middelværdi for at demonstrere en sammenhæng mellem Malmquist- og Törnqvist-indekset i tilfældet med afstandsfunktioner i translog form, og iii) at definition af Malmquist-indekset som i (5) og (6) derfor forekommer mest hensigtsmæssig. (7) har den fordel, at værdien af det beregnede indeks ikke er betinget af et valg af benchmarkteknologi.

Beregning af et Malmquist-indeks kræver alene beregning af de 4 Farrell-mål E_{00}, E_{11}, E_{01} og E_{10} og DEA gør det muligt at beregne disse mål for hvert enkelt sygehus. Beregningen af E_{00} og E_{11} sker i en standard DEA-model baseret på de foreliggende observationer for hhv. periode 0 og periode 1. Beregningen af E_{01} (E_{10}) sker for hver observation i periode 1 (periode 0) ved beregning af dens Farrell-mål i forhold til best practice som defineret ved DEA-frontieren i periode 0 (periode 1). DEA gør det dermed muligt at beregne Malmquist-indekset i praksis.

VI Sammenfatning

Det blev i indledningen konstateret, at der næppe er uenighed om, at det er vanskeligt at måle produktivitet specielt i offentlig sektor regi, og at sammenligning af produktivitet ved kollektivt versus privat udbud måske er af større interesse i dag end nogensinde tidligere. Det blev også konstateret, at validiteten af de konklusioner, der kan drages på grundlag af en produktivitetsanalyse, selvsagt er betinget af kvaliteten af metoder og design. Det produktionsøkonomiske fundament for DEA indikerer i kombination med de mange praktiske applikationer, der er rapporteret i litteraturen, at metoden er et godt udgangspunkt for både benchmarking på et fast tidspunkt og måling af produktivitetsudvikling over tid. Ovenfor er primært fokuseret på brug af DEA til måling af produktivitetsudvilking.

Det er beskrevet, hvordan de DEA-vægte, der er et integreret outcome af analysen, kan benyttes til aggregering af multiple inputs til et endimensionalt omkostningsmål og multiple outputs til et endimensionalt revenumål, og hvordan disse aggregerede mål efterfølgende kan benyttes til beregning af et simpelt Total Factor Productivity indeks på både virksomheds- og sektorniveau. Det er også beskrevet, hvordan dette indeks kan dekomponeres i to effekter, en, der afspejler ændringer i best practice, og en, der afspejler ændringer i den enkelte enheds positionering i forhold til best practice dvs. ændringer i den enkelte enheds tekniske efficiens. Det er velkendt, at DEA kan fortolkes i termer af et Farrell-indeks, der for hver enkelt enhed angiver den mindst mulige proportionale reduktion i inputs, der er nødvendig for at operere svarende til best practice.[6] Det er i Appendix beskrevet, hvordan dekomponeringen af et Total Factor Productivity indeks kan ske på grundlag af beregning af tre Farrell indekser, der angiver

i) forholdet mellem observeret og best practice output i periode *t+1* under anvendelse af den mængde ressourcer, der er brugt i samme periode,

ii) forholdet mellem det output, der ville have været observeret i periode *t,* hvis best practice forbruget af ressourcer havde svaret til forbruget i periode *t+1,*

iii) forholdet mellem observeret output i periode *t+1* og best practice i periode *t* under anvendelse af den mængde ressourcer, der er brugt i periode *t+1*.

Hvert af disse indekser kan beregnes ved løsning af en DEA-model. DEA gør det på den måde muligt både at beregne et Total Factor Productivity indeks og at dekomponere samme. Det er beskrevet, hvordan den samme dekomponering gælder for Malmquist-indekset. Det er forklaret, at hverken Total Factor Productivity indekset eller Malmquist-indekset er entydigt bestemt, fordi begge kan defineres med best practice i enten indeværende eller foregående periode som benchmark. Det er endelig forklaret, at Malmquist-indekset af den grund nogle gange defineres som den geometriske middelværdi af de to indekser, der fås ved ændring af benchmarkperioden.

Summary

Dynamic benchmarking relates to the measurement of changes in productivity over time which can be expressed in a Total Factor Productivity index. This index describes the net effect of i) changes in best practice and ii) the catching-up effect defined as the change in the positioning of the specific enterprise in relation to best practice. It is demonstrated how Data Envelopment Analysis may be used to estimate a Total Factor Productivity index and how this index may be decomposed multiplicatively into two sub-components describing changes in best practice and catching-up effects. A geometric intuition for the decomposition is provided, illustrated with figures and a mathematically stringent presentation.

Noter

1. Denne artikel er skrevet som et inviteret bidrag til det festskrift "Kære Samfund. En debatbog i anledningen af Jørn Henrik Petersens 60 års fødselsdag", der i anledning af Jørn Henrik Petersens 60 års fødselsdag d. 05/08-04 er udgivet på Syddansk Universitetsforlag. Festskriftets redaktion bestående af Anker Brink Lund, Janne Normann og Anders Klostergaard Petersen mente ikke, at manus passede ind i bogen, og fandt i øvrigt emnet meget specielt. Vi er af gode grunde afskåret fra at vurdere, om manus passer ind i festskriftet. Men det er næppe mange økonomer, som vil finde emnet voldsomt specielt. Og de fleste vil nok være enige i, at både form og indhold er i smuk overensstemmelse med en række af fødselarens egne arbejder. Forfatterne vil gerne takke redaktionen for Ledelse & Erhvervsøkonomi for med publiceringen her at have givet os mulighed for på denne måde at celebrere fødselaren. Og vi vil gerne gratulere Jørn Henrik Petersen både med fødselsdagen og hans indsats som økonom, herunder ikke mindst hans signifikante bidrag i debatten om velfærdsstaten.
2. Denne reskalering forudsætter en antagelse om konstant skalaafkast.
3. Det er ikke afgørende, at de 2 isokvantsegmenter rent faktisk skærer hinanden, in casu i punktet (6, 10). De relevante relative priser svarende til en given isokvant vil altid korrespondere til helt bestemte segmenter på denne og kan altid normaliseres med udgangspunkt i de observationer, der udspænder pågældende segmenter.
4. I det simple tilfælde med et input og et output kan TFP-indekset beregnes mere enkelt som ratiet mellem output-input forholdene i periode 1 og periode 0, d.v.s.

   $$TFP(\text{sygehus } 3) = \left(\frac{16}{6} / \frac{3}{5}\right) = \frac{40}{9}$$

   Bemærk, at den i hovedteksten skitserede fremgangsmåde er nødvendig i den mere generelle situation med flere inputs og/eller flere outputs.
5. I forrige afsnit benævnte vi dette outputniveau med $y^1(f^0)$.
6. Farrel's indeks angiver formelt den reciprokke værdi af den nødvendige proportionale inputreduktion.

Litteratur

Banker, R. D.:"Maximum Likelihood, Consistency and Data Envelopment Analysis: A Statistical Foundation" Management Science 39 (10), p. 1265-1273, 1993.

Banker, R. D.: "Hypothesis Tests using Data Envelopment Analysis", Journal of Productivity Analysis 7 (2/3) pp. 139-160, 1996.

Buchanan, J.M.: "Why Does Government Grow?", in "Budgets and Bureaucrats: The Sources of Government Growth" ed. by T. E. Borcherding, Duke University Press, Durham, North Carolina 1977.

Caves, D., L. Christensen and W. E. Diewert: "The Economic Theory of Index Numbers and the Measurement of Input, Output and Productivity" Econometrica Vol 50(6), p. 1393-1413, 1982.

Coelli, T, Prasada, D. S. Rao and G. E. Battese: "An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis" Kluwer Academic Publisher , 1998.

Färe, R., S. Grosskopf, B. Lindgren & P. Roos: "Productivity Changes in Swedish Pharmacies 1980-89: A Non-Parametric Malmquist Approach", Journal of Productivity Analysis (3) 1992.

Førsund, F.R.: "The Malmquist productivity index", Working Paper (1994)

Horrace, W. C. and Schmidt, P: "Confidence Statements for Efficiency Estimates from Stochastic Frontier Models" Journal of Productivity Analysis 7 (2/3), p. 257-281, 1996.

Korostelev, A. P., Simar, L. and sybakov, A. B.: "Efficient Estimation of Monotone Boundaries" Annals of Statistics 23 (2) p. 476-489, 1995.

Nishimu, M. & J.M. Page, Jr.: Total factor productivity growth, technological progress and technical efficiency change: Dimensions of productivity change in Yugoslavia 1965-78", Economic journal (92) 1982.

Simar, L and Wilson, P: "Sensitivity Analysis of Efficiency Scores: How to Bootstrap in Nonparametric Models" Management Science, 44, p. 49-61, 1998.

Spann, R.M.: "Public versus Private Provision of Governmental Services", in "Budgets and Bureaucrats: The Sources of Government Growth" ed. by T. E. Borcherding, Duke University Press, Durham, North Carolina 1977.

Appendix

Dette appendix omhandler relationen mellem TFP-målet foreslået af Nishimizu et al. (1982) (defineret ved (2) ovenfor) og Farrell's efficiensindeks.

De komponenter, der indgår i (2), involverer differenser mellem forskellige præstationsniveauer og kan derfor beskrives i termer af disse præstationsniveauer, idet både forbrug af ressourcer og præstationsniveau er målt på en logaritmisk skala. Til det formål benyttes svarende til Figur 2 følgende notation:

y_1: observeret præstationsniveau i periode 1 svarende til punktet c

x_1: observeret forbrug af ressourcer i periode 1

$y_0(x_1)$: opnået præstationsniveau ved anvendelse af observeret forbrug af ressourcer i periode 1 givet teknologien i periode 0 svarende til punktet b

$y_1(f_1)$: best practice præstationsniveau i periode 1 ved anvendelse af det observerede forbrug af ressourcer i periode 1 svarende til punktet C

$y_1(f_0)$: best practice præstationsniveau i periode 0 ved anvendelse af det observerede forbrug af ressourcer i periode 1 svarende til punktet B

Hver enkelt komponent i (2) kan herefter omskrives i termer af præstationsniveauer:

$$bc = \ln y_1 - \ln y_0(x_1)$$
$$BC = \ln y_1(f_1) - \ln y_1(f_0)$$
$$Bb = \ln y_1(f_0) - \ln y_0(x_1)$$
$$Cc = \ln y_1(f_1) - \ln y_1$$

(2) kan derfor omskrives til

$$\text{(A.1)} \qquad \ln y_1 - \ln y_0(x_1) = \ln y_1(f_1) - \ln y_1(f_0) + (\ln y_1(f_0) - \ln y_0(x_1) - (\ln y_1(f_1) - \ln y_1))$$

Tages nu antilogaritmen på begge sider denne lighed fås den såkaldte multiplikative dekomponering af produktivitetsændringen fra periode 0 til periode 1:

$$\text{(A.2)} \qquad TFP = \frac{y_1}{y_0(x_1)} = \frac{y_1(f_1)}{y_1(f_0)} \cdot \frac{\frac{y_1(f_0)}{y_0(x_1)}}{\frac{y_1(f_1)}{y_1}}$$

Komponenten $\frac{y_1}{y_0(x_1)}$ viser, at TFP er et mål for den relative faktorproduktivitet for de to observationer målt relativt til periode 1; transformationen af periode 0 observationen til periode 1, dvs. bevægelsen fra a til b i Figur 2 , betyder, at det observerede forbrug af ressourcer i periode 1 bliver en fælles faktor. Komponenten $\frac{y_1(f_1)}{y_1(f_0)}$ måler forholdet mellem best practice præstationsniveauet for de to teknologier ved anvendelse af det observerede forbrug af ressourcer i periode 1, d.v.s. den relative ændring i best practice.

Komponenten $\frac{\frac{y_1(f_0)}{y_0(x_1)}}{\frac{y_1(f_1)}{y_1}}$ har forholdet mellem best practice output i periode 1 og periode 0 output justeret til periode 1 forbrug af ressourcer i tælleren; best practice i forhold til observeret output i periode 1 definerer nævneren. Hvis TFP > 1, så er periode 1 observationen mere produktiv end periode 0 observationen.

Hvis komponenten $\frac{y_1(f_1)}{y_1(f_0)}$, som altså måler skiftet i best practice, er større end '1', så bidrager skiftet i teknologien positivt til FTP.

Og hvis komponenten $\frac{\frac{y_1(f_0)}{y_0(x_1)}}{\frac{y_1(f_1)}{y_1}}$ er større end '1',

så er periode 1 observationen tættere på best practice i periode 1, end periode 0 observationen er på best practice i periode 0.

Relationen mellem TFP defineret ved (A.2) og Farrell's efficiensindeks fås nu ved omskrivning af komponenten $\frac{\frac{y_1(f_0)}{y_0(x_1)}}{\frac{y_1(f_1)}{y_1}}$ i (A.2):

$$\text{(A3)} \qquad TFP = \frac{y_1}{y_0(x_1)} = \frac{y_1(f_1)}{y_1(f_0)} \cdot \frac{\frac{y_1(f_0)}{y_0(x_1)}}{\frac{y_1(f_1)}{y_1}} = \frac{y_1(f_1)}{y_1(f_0)} \cdot \frac{\frac{y_1}{y_1(f_1)}}{\frac{y_0(x_1)}{y_1(f_0)}}$$

Komponenten $\frac{y_1}{y_1(f_1)}$ måler forholdet mellem observeret og best practice output i periode 1 under anvendelse af de forbrugte ressourcer i periode 1. Dette er den direkte definition af Farrell's efficiensmål:

$$\text{(A.4)} \qquad E_{11} = \frac{y_1}{y_1(f_1)}$$

Her refererer første fodtegn i E_{11} til benchmarkperiode og andet til periode for observationen. Tilsvarende måler komponenten $\frac{y_0(x_1)}{y_1(f_0)}$ forholdet mellem det output, der ville have været observeret i periode 0, hvis brugen af ressourcer havde svaret til forbruget i periode 1 og best practice i perioden. Det betyder

$$\text{(A.5)} \qquad E_{00} = \frac{y_0(x_1)}{y_1(f_0)}$$

Endelig kan også komponenten $\frac{y_1(f_1)}{y_1(f_0)}$ fortolkes i termer af et Farrell-indeks. Lad os først definere Farrell's mål for observationen i periode 1 i forhold til best practice for periode 0:

$$\text{(A.6)} \qquad E_{01} = \frac{y_1}{y_1(f_0)}$$

Dette mål kan være større end '1', fordi vi nu måler output i periode 1 relativt til best practice i periode 0. Lad os nu kombinere (A.4) og (A.6):

$$\text{(A.7)} \qquad \frac{E_{01}}{E_{11}} = \frac{\frac{y_1}{y_1(f_0)}}{\frac{y_1}{y_1(f_1)}} = \frac{y_1(f_1)}{y_1(f_0)}$$

Vi kan nu definere TFP i termer af et sæt Farrell-mål på følgende måde:

$$\text{(A.8)} \qquad TFP = \frac{E_{01}}{E_{11}} \cdot \frac{E_{11}}{E_{00}} = \frac{E_{01}}{E_{00}}$$

Fortolkningen heraf er, at TFP definerer et mål for produktiviteten af observationen i periode 1 i forhold til observationen i periode 0, idet sammenligningen gøres meningsfyldt ved at evaluere begge observationer i forhold til samme best practice teknologi, nemlig den for periode 0.

TFP kan alternativt defineres i forhold til best practice teknologien for periode 1:

$$\text{(A.9)} \qquad TFP = \left(\frac{E_{10}}{E_{00}} \cdot \frac{E_{00}}{E_{11}}\right)^{-1} = \frac{E_{11}}{E_{10}}$$

(A 8 & 9) svarer selvsagt til (6) i Afsnit V. Det er klart, at der vil blive beregnet forskellige TFP-indekser afhængigt af, om der benchmarkes i forhold til periode 0 eller periode 1. Det problem kan undgås ved at definere det geometriske gennemsnit af (A8 & 9) som det relevante mål:

$$\text{(A 10)} \qquad TFP = \sqrt{\frac{E_{01}}{E_{00}} \cdot \frac{E_{11}}{E_{10}}} = \frac{E_{11}}{E_{00}} \sqrt{\frac{E_{00}}{E_{10}} \cdot \frac{E_{01}}{E_{11}}}$$

Det mål svarer til (7) i Afsnit V.