Repræsentation, kalkulation og beslutning under økonomisk usikkerhed - praktisk anvendelse af intervaller og fuzzy tal

Resumé

I denne artikel introduceres intervaller *og* fuzzy tal *som en hensigtsmæssig og matematisk stringent repræsentation af økonomiske usikkerheder. De fire regningsarter for således repræsenterede usikre økonomiske størrelser demonstreres og diskuteres. Ligeledes demonstreres økonomiske kalkulationer med usikre funktioner og de dermed forbundne problemer diskuteres. Ranking af usikre økonomiske størrelser sættes i relation til klassisk økonomisk beslutningsteori. Det godtgøres i artiklen, at konventionelle økonomiske kalkulationer bekvemt kan udvides til at inkludere relevante usikkerhedsvurderinger til understøttelse af rationelle beslutningsprocesser. Resultaterne illustreres i artiklen på typiske anvendelser inden for et kendt økonomisk problemområde, nemlig investeringsbeslutninger.*

Introduktion

Denne artikel tager sit udgangspunkt i det grundlæggende beslutningsproblem, der opstår som en konsekvens af beslutningstagerens *usikre* viden om de (fremtidige) forhold, der danner grundlaget for beslutningsprocessen. I langt de fleste praktiske tilfælde fremstilles beslutningssituationen som om beslutningstageren har *sikker* viden om de økonomiske størrelser, der indgår i kalkulationerne og anvendes i argu-

Af Hans Schjær-Jacobsen, John Thuneby og Kaj Madsen

mentationen for eller imod en bestemt beslutning. I den klassiske beslutningsteori antages det, at en kognitiv kompetent beslutningstager har *sikker* viden og er i stand til at forudse alle relevante fremtidige tilstande i verden. I dette tilfælde kan beslutningstageren kalkulere de økonomiske konsekvenser af enhver strategi han måtte ønske at realisere og følgelig vælge den strategi, som opfylder hans aspirationer optimalt, Knight (1921).

I beslutningsteorien skelner man normalt mellem *risiko* og *usikkerhed*. Ved beslutning under *risiko* antages det, at sandsynligheden for den fremtidige indtræfning af bestemte begivenheder er objektivt kendt, hvorimod sandsynlighedsfordelingen ikke objektivt kan fastlægges ved beslutninger under *usikkerhed*. Ved beslutninger under *risiko* er det (i princippet) muligt for beslutningstageren at kalkulere forventningsværdien af *utility* funktionen (den individuelle nyttefunktion) under hensyntagen til begivenhedernes sandsynlighedsfordelinger, Hertz (1964).

Inden for det økonomiske fagområde kan der findes mange fortolkninger af begrebet *usikkerhed (risiko)*. Kyläheiko (1995) foreslår denne yderligere kvalificering af begrebet:

- *Parametrisk usikkerhed (risiko)* kan repræsenteres ved at belutningstageren producerer en udtømmende liste over hans strategiske optioner, omverdenens mulige fremtidige tilstande og hans subjektive forestillinger om sandsynligheden for at disse mulige fremtidige tilstande indtræffer.
- Kilden til *strukturel usikkerhed (risiko)* er mangel på *a priori* viden om fremtidens strukturelle egenskaber, herunder konsekvenserne af interaktionen mellem virksomheden og omgivelserne, som ikke *ex ante* kan tages i betragtning, specielt ikke i forbindelse med konsekvenserne af teknologisk udvikling.
- Endelig er der *radikal usikkerhed (risiko)*, som opstår i forbindelse med en omgivelsesrelateret *strukturel usikkerhed (risiko)* og en virksomhedsrelateret *usikkerhed (risiko)* omkring procedurer, Dosi og Egidi (1991).

Sandsynlighedsbegrebet og statistiske metoder i det hele taget (så som Monte Carlo simulering) har spillet en dominerende rolle i forbindelse med repræsentation og kalkulation af økonomiske usikkerheder. Der er imidlertid forbundet væsentlige problemer med den praktiske anvendelse af disse metoder, også hvad angår beregningsalgoritmer, se f.eks. Schjær-Jacobsen (2000). Hvis vi f.eks. i det generelle tilfælde skal kalkulere nytteværdien som funktion af økonomiske variable givet ved deres sandsynlighedsfordelinger, involveres særdeles komplekse beregninger. Metoden kan desuden kun benyttes, såfremt sandsynlighedsfordelingerne for de enkelte variable overhovedet kan beskrives, hvilket sjældent er tilfældet. Dertil kommer at beregningen af nytteværdien i princippet bør inddrage beslutningstagerens risikopræference, da det ikke er ligegyldigt for beslutningstageren, hvilken usikkerhed der er relateret til en givet afkast.

I denne artikel foreslås det derfor at gå andre veje, der i praksis tillader at kalkulation med usikre økonomiske størrelser kan gennemføres ved en bekvem udvidelse af konventionelle repræsentationer af sikre størrelser, dvs. ordinære tal, til repræsentationer af usikre størrelser, nemlig *intervaller* og *fuzzy tal*. Historisk og videnskabeligt er der tale om to forskellige udgangspunkter, som i denne artikel søges bragt ind i en fælles forståelses- og anvendelsesramme. Tankegangen omkring *intervaller* stammer fra bestræbelser på at få styr på de praktiske beregningsmæssige unøjagtigheder, der opstår i computere, som opererer med en begrænset nøjagtighed i den interne talrepræsentation, Moore (1962, 1966). Ideerne om *fuzzy mængder* og *tal* stammer fra ønsket om kunne skabe en nøjagtig repræsentation af usikre og vage informationer og en mangeværdi-logik som kontrast til den klassiske binære logik sand-falsk, Zadeh (1965, 1975).

Numerisk repræsentation af usikre økonomiske størrelser

Repræsentation ved intervaller

En sikker økonomisk størrelse repræsenteres ved et reelt tal. F.eks. siger vi, at afsætningen af et bestemt produkt i den kommende periode vil være 10.000 stk. Det falder naturligt at repræsentere en usikker økonomisk størrelse som et *interval*. F.eks. kan vi ikke vide med sikkerhed, at afsætningen vil være 10.000 stk., men vi kan måske sige, at afsætningen vil ligge mellem 8.000 og 11.000 stk., uden nøjere at kunne specificere hvor i *intervallet* [8.000, 11.000] afsætningen vil komme til at ligge. *Estimatet* 10.000 stk. er således blevet erstattet med et *dobbelt estimat* [8.000, 11.000] stk. Det dobbelte estimat repræsenterer usikkerheden i forbindelse med den økonomiske størrelse, som afsætningen er.

En forudsætning for at introducere *intervallet* som en meningsfuld repræsentation af usikkerhed er, at vi kender den nedre og øvre grænse for en given økonomisk størrelse. Har vi så ikke blot erstattet én form for uvidenhed (nemlig uvidenheden om den eksakte værdi af den økonomiske størrelse) med en anden form for uvidenhed (nemlig uvidenheden om de eksakte størrelser af den nedre og øvre grænse)? Hertil er at sige, at der stilles større krav til argumentationen, og dermed vores viden, når vi hævder, at afsætningen i næste periode bliver 10.000 stk. end når vi hævder, at afsætningen vil ligge mellem 8.000 og 11.000 stk., endsige mellem 4.000 og 15.000 stk. Jo større usikkerhed vi må lade indgå i den økonomiske kalkulation, jo mere ufuldstændig er den viden, som er repræsenteret i kalkulationen.

Det er for nylig blevet foreslået at anvende *intervaller* i forbindelse med evaluering af *worst- og best-case* (WBC) økonomiske konsekvenser af teknologisk udvikling, Schjær-Jacobsen (1996, 1997).

Repræsentation ved *fuzzy tal*

Siden Zadeh (1965) introducerede *fuzzy mængder* og *fuzzy tal* har der udviklet sig en lang række applikationer inden for ingeniørvidenskab, management og finansiering. En *fuzzy mængde* er en klasse af objekter med et kontinuum af grader af medlemskab defineret af en *membership* funktion, som kan antage værdier mellem 0 og 1. *Fuzzy mængde* konceptet tilbyder en stringent måde at registrere upræcise, vage og usikre udtalelser på, så som "store investeringer", "omkostningerne vil blive reduceret betragteligt i den kommende periode" og "omsætningen vil stige en smule næste år".

I denne artikel er vi primært interesseret i *fuzzy tal* konceptet som en måde at beskrive usikker eller *fuzzy* viden om økonomiske størrelser på. Ifølge Dubois og Prade (1978, 1979) kan et *fuzzy tal* defineres mere præcist som en *fuzzy* delmængde af de reelle tal R karakteriseret ved *membership* funktionen f(x). Denne generelle fremstilling af *fuzzy tal* kan forenkles ved at antage en stykkevis lineær *membership* funktion. Det kan f.eks. føre til to typer af *fuzzy tal:*

For det første det *trapezoidale fuzzy tal,* Wang og Liang (1995), se Figur 1:

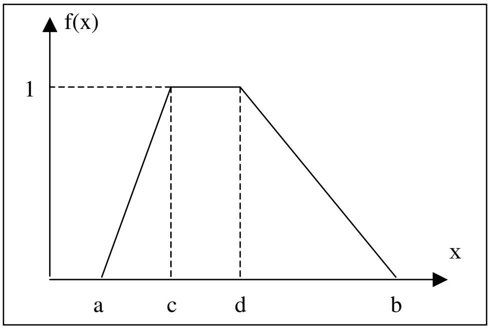
$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x-a)/(c-a), && a \leq x \leq c && \text{(1a)}\\
&= 1, && c \leq x \leq d && \text{(1b)}\\
&= (b-x)/(b-d), && d \leq x \leq b && \text{(1c)}\\
&= 0, && \text{ellers.} && \text{(1d)}
\end{aligned}
$$

For det andet det *triangulære fuzzy tal,* Chiu og Park (1994), se Figur 2:

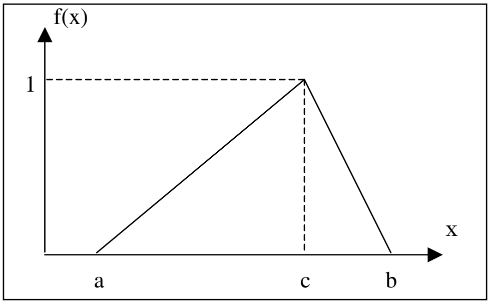
$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x-a)/(c-a), && a \leq x \leq c, && \text{(2a)}\\
&= (b-x)/(b-c), && c \leq x \leq b, && \text{(2b)}\\
&= 0, && \text{ellers.} && \text{(2c)}
\end{aligned}
$$

I denne artikel begrænser vi os til *fuzzy* repræsentation af økonomiske usikkerheder v.hj.a. *triangulære fuzzy tal.* Når afsætningen af et bestemt produkt i en fremtidig periode kan repræsenteres ved det *triangulære fuzzy tal* [8.000, 10.000, 11.000] stk., kan det fortolkes således: Afsætningen vil efter alt at dømme formodentlig blive omkring 10.000 stk. I hvert tilfælde vil afsætningen ligge mellem 8.000 og 11.000 stk., de detaljerede muligheder fremgår af *membership* funktionens forløb. Hvis vi blot interesserer os for den formodede afsætning og dens nedre og øvre grænser (og altså ikke det detaljerede forløb af *membership* funktionen), har vi repræsenteret afsætningen som en usikker økonomisk størrelse ved et *tre-dobbelt estimat* [a, c, b].

Figur 1. Membership funktion for trapezoidalt fuzzy tal.



Figur 2. Membership funktion for triangulært fuzzy tal.



De fire regningsarter ved usikkerheder

Interval algebra

Vi estimerer afsætningen af et bestemt produkt til [8.000, 11.000] stk. i den kommende periode. Af forskellige grunde er der også usikkerhed om produktets salgspris, lad os sige at salgsprisen estimeres til [600, 700] kr./stk. For at komme frem til et estimat af produktets omsætning må vi definere en algebra, der tillader os at multiplicere to usikre talstørrelser, som hver er repræsenteret ved *intervaller.*

I intervalanalysen, Moore (1966), erstattes de algebraiske operationer addition, subtraktion, multiplikation og division (altså de fire regningsarter) med tilsvarende operationer på *intervaller*, $I_1 = [a_1, b_1]$ and $I_2 = [a_2, b_2]$:

$$I_1 + I_2 = [a_1 + a_2, b_1 + b_2], \quad (3a)$$
$$I_1 - I_2 = [a_1 - b_2, a_2 - b_1], \quad (3b)$$
$$I_1 * I_2 = [\min(a_1a_2, a_1b_2, b_1a_2, b_1b_2), \max(a_1a_2, a_1b_2, b_1a_2, b_1b_2)], \quad (3c)$$
$$I_1 / I_2 = [a_1,b_1] * [1/b_2, 1/a_2], 0 \notin [a_2,b_2]. \quad (3d)$$

På denne måde kan resultatet af beregninger på usikre tal overvåges, således at den tilsvarende usikkerhed på resultatet beregnes, se f.eks. Caprani og Madsen (1992).

Det lille eksempel i starten af afsnittet kan nu gøres færdig. Ved anvendelse af (3c) kan produktets omsætning bestemmes til [4.800.000, 7.700.000] kr. Det er, hvad der kan siges under de givne omstændigheder, dvs. ud fra hvad vi ved om usikkerheden på de indgående økonomiske størrelser, afsætning og pris.

Triangulær fuzzy algebra

For det *triangulære fuzzy tal* defineret ved (2) introduceres henholdsvis den venstre $L(\alpha)$ og højre $R(\alpha)$ repræsentation af *membership* funktionen. Et *triangulært fuzzy tal* F kan herefter skrives på formen for et *interval:*

$$F = [L(\alpha), R(\alpha)], \text{ hvor} \quad (4a)$$
$$L(\alpha) = a + (c-a)\alpha \text{ og}$$
$$R(\alpha) = b + (c-b)\alpha, \alpha \in [0,1]. \quad (4b)$$

Som et eksempel, betragt multiplikation af to triangulære fuzzy tal F_1 and F_2 hvor

$$F_1 = [1+\alpha, 4-2\alpha] \text{ og}$$
$$F_2 = [2+3\alpha, 7-2\alpha], \alpha \in [0,1]. \quad (5)$$

For produktet fås v.hj.a. (3c):

$$F_1 * F_2 = [3\alpha^2 + 5\alpha + 2, 4\alpha^2 - 22\alpha + 28], \quad \alpha \in [0,1]. \quad (6)$$

Bemærk, at medens *membership* funktionerne for faktorerne F_1 og F_2 er stykkevis lineære (5), bliver *membership* funktionen for produktet $F_1 * F_2$ stykkevis kvadratisk (6). I almindelighed kan der opstå *membership* funktioner af vilkårlig høj kompleksitet, hvilket ville umuliggøre kalkulationerne i praksis. En måde at overkomme denne vanskelighed på, er at nøjes med at beregne *membership* funktionen, dvs. $L(\alpha)$ og $R(\alpha)$, for et endeligt antal værdier af α. Som et eksempel på dette, vil vi her definere et *tre-dobbelt estimat* v.hj.a. α-snit svarende til de to α-værdier $\alpha = 0$ og $\alpha = 1$.

Således fås af (6) et *tre-dobbelt estimat* [a, c, b] for produktet $F_1 * F_2 = [2, 10, 28]$, idet

$$L(0) = a = 3\alpha^2 + 5\alpha + 2 \big|_{\alpha=0} = 2, \quad (7a)$$
$$L(1) = R(1) = c = 3\alpha^2 + 5\alpha + 2 \big|_{\alpha=1} = 4\alpha^2 - 22\alpha + 28 \big|_{\alpha=1} = 10, \text{ og} \quad (7b)$$
$$R(0) = b = 4\alpha^2 - 22\alpha + 28 \big|_{\alpha=0} = 28. \quad (7c)$$

Baseret på det ovenfor fremførte og som en generalisering af Kaufmann og Gupta (1988) kan vi nu definere de fire regningsarter for *triangulære fuzzy tal* repræsenteret ved de simplificerede *tre-dobbelte estimater* $F_1 = [a_1, c_1, b_1]$ og $F_2 = [a_2, c_2, b_2]$ således:

$$F_1 + F_2 = [a_1 + a_2, c_1 + c_2, b_1 + b_2], \quad (8a)$$
$$F_1 - F_2 = [a_1 - b_2, c_1 - c_2, a_2 - b_1], \quad (8b)$$
$$F_1 * F_2 = [\min(a_1a_2, a_1b_2, b_1a_2, b_1b_2), c_1c_2, \max(a_1a_2, a_1b_2, b_1a_2, b_1b_2)], \quad (8c)$$
$$F_1 / F_2 = [a_1, c_1, b_1] * [1/b_2, 1/c_2, 1/a_2], \text{ for } 0 \notin [a_2, c_2, b_2]. \quad (8d)$$

Lad os et øjeblik vende tilbage til eksemplet med et *tre-dobbelt estimat* af den kommende periodes afsætning på [8.000, 10.000, 11.000] stk. Hvis salgsprisen estimeres til [600, 660, 700] kr./stk., vil den resulterende omsætning blive [4.800.000, 6.600.000, 7.700.000] kr. Her svarer det midterste tal til en ordinær kalkulation og de to yderste tal til en *interval* kalkulation.

Beregninger med usikre funktioner

Interval funktioner

Beregninger med usikre funktioner er ikke er trivielt problem. Betragt f.eks. det problem, der består i at beregne funktionen g(x) = x(1-x), hvor x er en variabel, som er behæftet med usikkerhed. Lad os f.eks. sige, at vi ikke kender værdien af x, bortset fra, at vi ved den ligger mellem 0 og 1. For det første er der problemet med den manglende gyldighed af den distributive lov. Afhængigt af om vi "ganger ind i parentesen" eller ej, får vi at den resulterende funktion g antager henholdsvis værdimængderne [0, 1] og [-1, 1]. For det andet er der det problem, at ingen af disse resultater er korrekte, idet begge intervaller er for brede. Hvorfor det? Det skyldes, at den variable x optræder mere end et sted i udtrykket for g. En nøjere undersøgelse viser, at den sande værdimængde for g er $[0, \frac{1}{4}]$.

Løsningen på dette problem er at anvende numeriske globale optimeringsmetoder til at bestemme det sande resulterende interval, se Hansen (1992) og Caprani og Madsen (1992). I denne artikel nøjes vi med at konstatere, at problemet kan løses og er blevet implementeret i et tilgængeligt add-in modul til MS-Excel regneark, Hyvönen og de Pascale (1997, 1999).

I økonomiske kalkulationer indgår som oftest funktioner, der rækker ud over anvendelse af de fire regningsarter, f.eks. i forbindelse med renteberegninger og investeringskalkuler. Betragt f.eks. en ordinær annuitet på 1 over n perioder ved renten i, Schjær-Jacobsen (1996). Antag, at renten er behæftet med usikkerhed, vi kender ikke renten, bortset fra at den ligger mellem 3% og 7%. En interval kalkulation af nutidsværdien efter udtrykket for PV, hvor i = [3, 7] %,

$$PV = (1 - (1 + i)^{-n})/i \quad (9)$$

giver PV = [1.963, 9.567] medens en ordinær beregning af nutidsværdien i de to ekstremer for renten, nemlig 3% og 7%, giver PV = [4.100, 4.580], der er det sande og meget snævrere *interval.* Forklaringen er, at variablen i optræder mere end én gang i udtrykket (9), nemlig to gange, og det resulterende *interval* bliver derfor for bredt. Faktisk er PV en *monoton* funktion af renten og ekstremerne for dens sande værdimængde fremkommer derfor ved beregning af PV i de to ekstreme værdier for renten. I det generelle tilfælde er løsningen igen at anvende en global optimeringsmetode.

Funktioner med *tre-dobbelte estimater*

Betragt igen funktionen g(x) = x(1-x), hvor x nu antages at være en usikker variabel, der kan beskrives med et *tre-dobbelt estimat* [0, $^1/_2$, 1]. Den sande værdimængde for g bliver det tre-dobbelte estimat [0, $^1/_4$, $^1/_4$].

Betragt igen annuiteten fra afsnit 4.1, hvor renten nu er en usikker variabel, der kan beskrives ved det *tre-dobbelte estimat* [3, 6, 7] %. Den resulterende nutidsværdi bliver da det *tre-dobbelte estimat* [4.100, 4.212, 4.580].

I almindelig kan funktioner med *tre-dobbelte estimater* beregnes på den måde, at funktionsværdien af estimatets midterste tal beregnes på konventionel vis, f.eks. i et konventionelt regneark. Funktionværdiens ekstreme værdier beregnes som en interval funktion, f.eks. under anvendelse af et add-in modul til MS-Excel, Hyvönen og de Pascale (1997, 1999).

Ranking af usikre økonomiske størrelser

Ranking af *intervaller*

Kravet om et rationelt økonomisk valg mellem beslutningsalternativer rejser behovet for at *ranke* (prioritere) usikre økonomiske størrelser. Lad os i dette afsnit antage, at der foreligger tre alternative muligheder for investering A, B og C. For alternativ A kalkuleres en usikker nutidsværdi på [A_a, A_b] = [80, 120], for alternativ B [90, 110] og for alternativ C [90, 120]. Hvilket alternativ A, B eller C skal foretrækkes, hvis ønsket er at maksimere nytteværdien for beslutningstageren?

Problemet er ikke enkelt, idet hver beslutningstager må antages at have sin egen nyttefunktion, der afspejler hans *risikopræference* (risikovillighed) set i forhold til det forventede afkast. Klassisk beslutningsteori, se von Neumann og Morgenstern (1944) og Luce og Raiffa (1957), foreslår et antal forskellige kriterier for valg mellem beslutningsalternativer, der afspejler beslutningstagerens nyttefunktion, og dermed hans *risikopræference*. Generelt skelnes der mellem aversion, attraktion og neutralitet over for risiko og usikkerhed. Beslutningskriterier af denne art kan fortolkes i relation til grænser for usikkerheder, f. eks. *interval* endepunkter, Thuneby (1996). I det følgende vil vi fokusere på nogle af de mest anvendte beslutningskriterier.

Ved **maximax kriteriet** (den optimistiske beslutningstager) udvælges det specifikke beslutningsalternativ, som har potentiale til at producere det størst muligt afkast (f. eks. største øvre grænse for den usikre nutidsværdi). For *intervaller* kan dette skrives som:

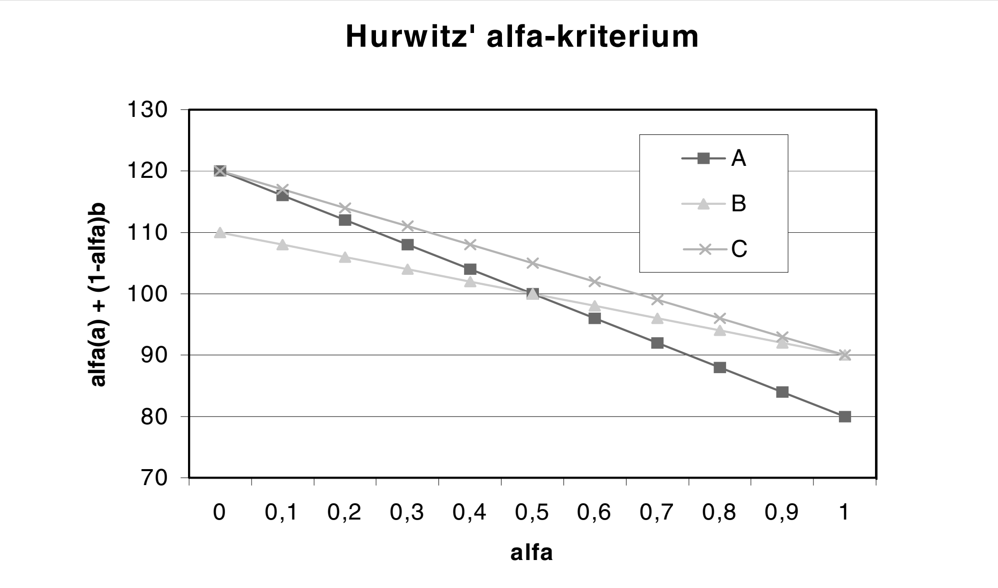
$$A > B \equiv A_b > B_b \qquad (10)$$

dvs. alternativ A foretrækkes frem for alternativ B, hvis den øvre grænse for kapitalværdien af A er større end den øvre grænse for kapitalværdien af B. I ovenstående eksempel vælges enten alternativ A eller C, idet de er lige gode i henhold til kriteriet. **Maximin kriteriet** (den pessimistiske beslutningstager) peger på det alternativ, der har den største af de lavest tænkelige nutidsværdier (største nedre grænse). Dette kan skrives som

$$A > B \equiv A_a > B_a \qquad (11)$$

I vores eksempel vælges alternativ B eller

Figur 3. Hurwitz' α-kriterium for alternativerne A, B og C.



C. Den bagkloge beslutningstager ville anvende **minimax-regret kriteriet,** der minimerer den maximale fortrydelse (regret) ved en forkert beslutning. For A er den maksimale regret 120 - 80 = 40, hvor den for B og C er 120 - 90 = 30. Beslutningstageren bør altså vælge alternativ B eller C. Er der blot to alternativer, svarer dette iøvrigt til den største middelværdi af de to *intervaller*, se Thuneby (1996):

$$A > B \equiv$$
$$m(A) > m(B),$$
$$m(A) = (A_b - A_a)/2. \qquad (12)$$

Den risikoneutrale beslutningstager vil oftest anvende den største middelværdi som beslutningskriterie, bedre kendt som **Laplace kriteriet,** der er kendetegnet ved, at alle udfald tænkes lige sandsynlige:

$$A > B \equiv m(A) > m(B). \qquad (13)$$

Dette medfører et valg af alternativ C.

Afslutningsvis beskrives anvendelse af et lidt mere kompliceret beslutningskriterium, nemlig **Hurwitz' α-kriterium,** der sammenfatter alle de ovennævnte beslutningskriterier i et. Ideen er, at hver beslutningstager for en given beslutning vælger et pessimismeindeks α, hvor $0 \leq \alpha \leq 1$, (ikke at forveksle med det tidligere omtalte α-snit). Et index på 0 vil sige, at beslutningstageren ynder risiko, et index på 1 betyder at beslutningstageren er risikoavers og et index på $^1/_2$ betyder, at beslutningstageren er risikoneutral. For to intervaller ser kriteriet ud som følger:

$$A > B \equiv \alpha(A_a - B_a) + (1-\alpha)(A_b - B_b) > 0. \qquad (14)$$

Det ses af (14), at for $\alpha = 1$ svarer kriteriet til maximin, for $\alpha = 0$ til maximax og for $\alpha = {}^1/_2$ til Laplace kriteriet. Selv om Hurwitz' α-kriterium umiddelbart virker omstændeligt, kan beslutningstageren vælge sit pessimismeindeks efter beslutningens karakter, fremfor generelt at skulle vælge mellem at være pessimist, optimist eller neutral.

Er der tale om flere end to intervaller, vælges det alternativ, hvor $\alpha a + (1-\alpha)b$ har den største værdi for den aktuelle værdi af α. For de tre alternativer A, B og C er resultatet vist i Figur 3.

Som det ses af Figur 3, er alternativ C i alle tilfælde mindst lige så godt eller bedre end de andre alternativer med dette kriterium, uanset beslutningstagerens pessimismeindeks. Alternativ C bør derfor vælges, hvilket ikke er nogen overraskelse når man ser på resultaterne fra de øvrige beslutningskriterier. Stod valget alene mellem alternativ A og B, ville optimisten vælge A og pessimisten vælge B, igen som ovenfor.

Ranking af tre-dobbelte estimater

I det generelle tilfælde hvor usikre økonomiske størrelser er repræsenteret ved generelle *fuzzy tal* er *ranking* temmelig kompliceret. Der er foreslået en lang række metoder, hvoraf ingen dog er fundet ideelle, Chen og Hwang (1992). Forholdene bliver noget enklere, når det drejer sig om *ranking* i tilfældet *tre-dobbelte estimater* [a, c, b].

Når *tre-dobbelte estimater* af udseendet [a, c, b] skal rankes indbyrdes foreslår Kaufmann og Gupta (1988) tre kriterier, her nævnt efter faldende prioritering:

- Sammenligning af index, f.eks. (a+2c+b)/4. Dette svarer til en slags forventningsværdi eller 1. ordens moment.
- Sammenligning af c som repræsentant for estimaternes mest dominerende værdier, svarende til en ordinær repræsentation af økonomiske størrelser, hvorom der ikke hersker usikkerhed.
- Sammenligning af estimaternes range, dvs. b-a.

Kriterierne er af en *ad hoc* karakter og tager f.eks. ikke hensyn til beslutningstagerens risikoaversion og -attraktion, jvf. diskussionen i afsnit 5.1. Vi vil derfor forsøge at udvide de klassiske beslutningskriterier til anvendelse ved ranking af *tre-dobbelte estimater*:

Det viser sig umiddelbart, **at maximax, maximin, minimax-regret** og **Laplace kriterierne** for *tre-dobbelte* estimater er identiske med anvendelserne på *intervaller*: Det kan imidlertid argumenteres, at disse klassiske beslutningskriterier ikke tager hensyn til beliggenheden af midterværdien i det *tre-dobbelte estimat*, og at der derfor bør udvikles et beslutningskriterium, der tager hensyn til alle tre værdier og deres indbyrdes beliggenhed. Vi vil derfor prøve at modificere Hurwitz' α-kriterium til anvendelse ved ranking af *tre-dobbelte estimater*:

Et modificeret Hurwitz' α-kriterium for *tre-dobbelte estimater*

Et modificeret kriterium bør bevare det oprindelige kriteriums originale egenskaber: For $\alpha = 0$ bør det svare til maximax, for $\alpha = 1$ til maximin og for $\alpha = 1/2$ være risikoneutral. For alle værdier af α, $0 \leq \alpha \leq 1$, er det rimeligt, at den midterste værdi c i det *tre-dobbelte estimat* tillægges en passende vægt i forhold til de to yderværdier. Vi forslår derfor et beslutningskriterium for to *tre-dobbelte estimater* af følgende form:

$A > B \equiv$
$\alpha(A_a - B_a) + (1-\alpha)(A_b - B_b) + n\, f(\alpha)\,(I_A - I_B) > 0,$ (15)

hvor n er en konstant, $f(\alpha)$ er en funktion af α og I er et passende indeks, der vægter de tre værdier i det *tre-dobbelte estimat*. For $n = 4$ og $f(\alpha) = \alpha - \alpha^2$ fås (bemærk at $f(\alpha)$ er symmetrisk mellem 0 og 1 med toppunkt i $\alpha = 1/2$):

$A > B \equiv$
$\alpha(A_a - B_a) + (1-\alpha)(A_b - B_b) + 4(\alpha - \alpha^2)(I_A - I_B) > 0.$ (16)

For $\alpha = 0$ fås af (16):

$A > B \equiv A_b - B_b > 0,$
(maximax kriteriet). (17)

For $\alpha = 1$ fås af (16):

$A > B \equiv A_a - B_a > 0,$
(maximin kriteriet). (18)

For $\alpha = 1/2$ fås af (16):

$A > B \equiv 1/2(A_a - B_a) + 1/2(A_b - B_b) + I_A - I_B =$
$m(A) - m(B) + I_A - I_B > 0.$ (19)

I det risikoneutrale kriterium (19) er middelværdien m for de to estimater vægtet med samme vægt som indeks I, som nu skal vælges på en passende måde. Umiddelbart virker tre muligheder naturlige, som vist i det følgende for $\alpha = 1/2$:

For det første kan indeks I vælges til det indre punkt c i det *tre-dobbelte estimat*, dvs. $I_A = A_c$ og $I_B = B_c$. Af (19) fås kriteriet, som (overraskende) svarer til indekset (a+2c+b)/4, Kaufmann og Gupta (1988):

$A > B \equiv$
$1/2A_a - 1/2B_a + A_c - B_c + 1/2A_b - 1/2B_b > 0.$ (20)

For det andet kan indeks I vælges som middelværdien m af det *tre-dobbelte estimat*, dvs. $I_A = m(A)$ og $I_B = m(B)$, hvorved fås af (19), svarende til det risikoneutrale Laplace kriterium uden hensyntagen til den indre værdi i det *tre-dobbelte estimat:*

$A > B \equiv m(A) - m(B) > 0.$ (21)

Endelig vælges indeks I = (a+2c+b)/4 og af (19) fås:

$A > B \equiv$
$3A_a - 3B_a + 2A_c - 2B_c + 3A_b - 3B_b > 0.$ (22)

Altså, vægtes Kaufmann og Gupta's indeks lige så meget som midtpunktet for $\alpha = 1/2$, svarer dette til en vægtning på 3:2:3 af værdierne i det *tre-dobbelte estimat.*

Praktiske investeringskalkuler med økonomiske usikkerheder

Investeringskalkuler med *intervaller*

Betragt to alternative investeringer A og B inden for samme tidshorisont, som er givet ved deres usikre nettobetalingsstrømme,

Tabel 1. Usikre nettobetalingsstrømme og nutidsværdier (PV) for to alternative investeringer A og B ved kalkulationsrenten [6, 9] % p.a.

	ÅR 0	ÅR 1	ÅR 2	ÅR 3	ÅR 4	PV
Investering A	[-250, -200]	[100, 140]	[115, 160]	[130, 180]	[130, 210]	[131, 392]
Investering B	[-120, -100]	[85, 95]	[90, 110]	[100, 130]	[135, 175]	[207, 335]

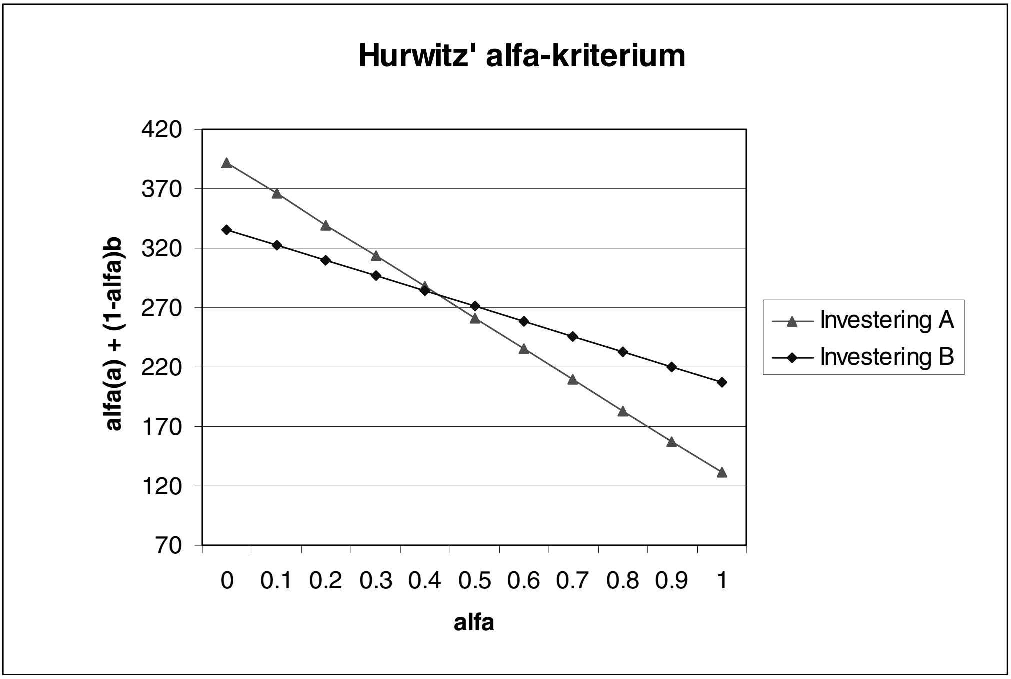
repræsenteret ved intervaller. Med en usikker kalkulationsrente på [6, 9] % p.a., er de usikre nutidsværdier beregnet v.hj.a. Interval Solver 2000, Hyvönen og de Pascale (1997), tallene fremgår af Tabel 1.

Det ses, at begge investeringer har positiv nutidsværdi, hvorfor de begge er fordelagtige i forhold til ikke at investere. Ved anvendelse af maximax kriteriet fås, at alternativ A er mest fordelagtig, da denne investering har potentiale til i bedste fald at præstere den højeste nutidsværdi, nemlig 392 mod 335 for B. Maximin kriteriet udpeger alternativ B, da denne investering i værste fald vil resultere i den højeste nutidsværdi, nemlig 207 mod 131 for A. Minimax regret kriteriet peger på alternativ B med en maksimum regret på kun 392 - 207 = 185 mod 335 - 131 = 204 for A. Endelig giver anvendelse af Laplace kriteriet, at alternativ B skal foretrækkes med en middel nutidsværdi på 271 mod 261 for A.

Anvendes Hurwitz' α-kriterium ses det af Figur 4, at investering A er bedst for α-værdier under 0,43 (maximax) medens investering B er bedst ellers (maximin, minimax regret og Laplace).

Det ses umiddelbart, at repræsentation og kalkulation v. hj.a. af *intervaller* kan anvendes til vurdering af usikre investeringer, især hvor sandsynlighedsfordelingerne for de enkelte udfald ikke er kendt. Der er ydermere den fordel, at beslutningstagerens nyttefunktion ikke behøver at være kendt, blot der benyttes et beslutningskriterium, der tager hensyn til hans risikopræference.

Figur 4. Hurwitz' a-kriterium for investeringerne A og B.



Tabel 2. Investeringskalkule for usikkert produkt- og produktionsudviklingsprojekt med tre-dobbelte estimater. Tal i hvide celler er input-variable mens grå celler indeholder beregnede størrelser.

(DKR 1000)	ÅR 0	ÅR 1	ÅR 2	ÅR 3	ÅR 4
Salgspris pr. stk.		[770, 800, 805]	[740, 750, 760]	[700, 720, 730]	[670, 700, 710]
Dir. omkostninger pr. stk.		[464, 480, 496]	[425, 440, 465]	[368, 400, 432]	[358, 390, 422]
Dækningsbidrag pr. stk.		[274, 320, 341]	[275, 310, 335]	[268, 320, 362]	[248, 310, 352]
Afsætning (stk.)		[60, 65, 70]	[100, 110, 115]	[105, 120, 125]	[75, 90, 95]
Omsætning		[46.200, 52.000, 56.350]	[74.000, 82.500, 87.400]	[73.500, 86.400, 91.250]	[50.250, 63.000, 67.450]
Direkte omkostninger		[27.840, 31.200, 34.720]	[42.500, 48.400, 53.475]	[38.640, 48.000, 54.000]	[26.850, 35.100, 40.090]
Dækningsbidrag		[16.440, 20.800, 23.870]	[27.500, 34.100, 38.525]	[28.140, 38.400, 45.250]	[18.600, 27.900, 33.400]
Dækningsbidrag (%)		[34, 40, 44]	[36, 41, 45]	[37, 44, 52]	[35, 44, 53]
Salgsomkostninger	[6.400, 8.000, 8.800]	[6.400, 8.000, 8.800]	[5.600, 6.400, 7.200]	[4.000, 4.800, 5.600]	[3.200, 4.000, 4.800]
RD&E omkostninger	[18.500, 19.500, 21.700]	[9.000, 10.500, 12.400]	[1.600, 2.400, 3.100]	[400, 800, 1.600]	[400, 800, 1.600]
Driftsresultat	[-30.500, -27.500, -24.900]	[-4.760, 2.300, 8.470]	[17.200, 25.300, 31.325]	[20.940, 32.800, 40.850]	[12.200, 23.100, 29.840]
Ændring i driftskapital		[-8.680, -7.800, -6.960]	[-6.409, -4.300, -1.945]	[-2.875, 100, 3.709]	[5.196, 12.000, 17.964]
Investering	[-19.000, -18.000, -16.000]	[-14.000, -12.000, -11.500]			[800, 3.200, 4.000]
Nettobetalingsstrøm	[-49.500, -45.500, -40.900]	[-27.440, -17.500, -9.990]	[10.791, 21.000, 29.380]	[18.065, 32.900, 44.559]	[18.196, 38.300, 51.804]
Kalkulationsrente (% p.a.)		[8, 9, 11]	[8, 9, 11]	[8, 9, 11]	[8, 9, 11]
Nutidsværdi	[-49.500, -45.500, -40.900]	[-25.407, -16.055, -9.000]	[8.758, 17.675, 25.189]	[13.209, 25.405, 35.372]	[11.986, 27.133, 38.077]
Kapitalværdi	[-40.954, 8.658, 48.738]				

Investeringskalkuler med *tre-dobbelte estimater*

Ved anvendelse af *tre-dobbelte estimater* for de indgående økonomiske størrelser, er det muligt på en systematisk måde at udvide investeringskalkuler fra udelukkende at være baseret på ordinære tal til også at repræsentere nedre og øvre grænser for usikkerheder. Dette svarer til at anvende *triangulære fuzzy tal* med α-snit svarende til $\alpha = 0$ og 1.

Vi betragter her et investeringseksempel, der drejer sig om udvikling af et nyt produkt og produktionssystem. Investeringskalkulen er vist i Tabel 2, idet beregningerne af nedre og øvre grænser for tallene er foretaget v.hj.a. Interval Solver 2000, Hyvönen og de Pascale (1997).

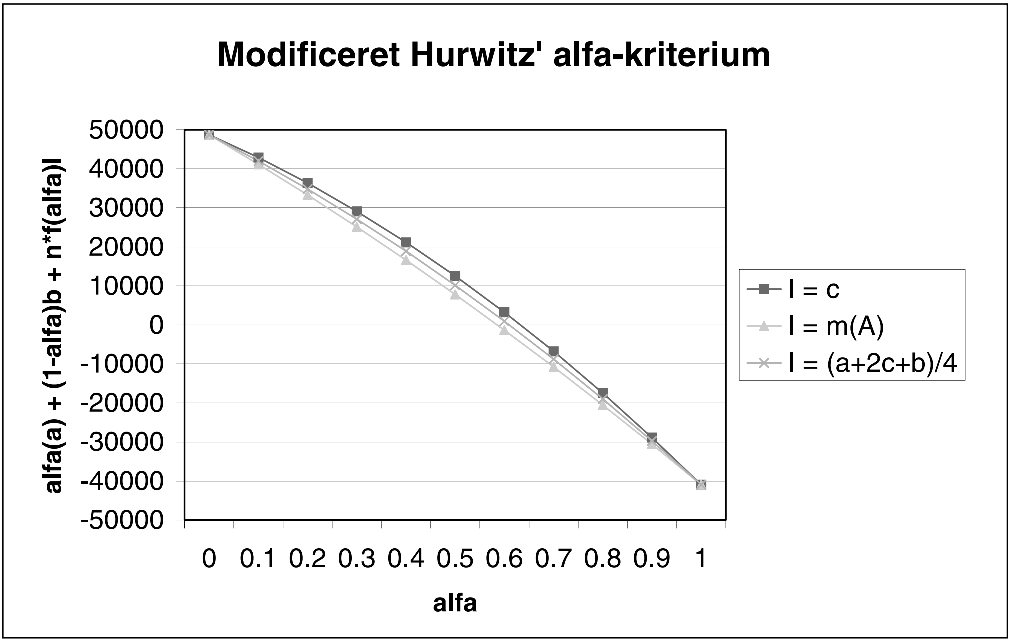
Ud fra en betragtning, som udelukkende baserer sig på kalkulens ordinære tal (dvs. midterste tal i de kantede parenteser) er investeringen fordelagtig, idet kapitalværdien er komfortabel positiv ved den valgte kalkulationsrente 9% p.a., nemlig DKR 8.658.000.

Tages *usikkerhederne* imidlertid med i betragtning, kan vurderingen komme til at falde anderledes ud, vi vil hovedsagelig basere de følgende betragtning på det modificerede Hurwitz' α-kriterium. For den optimistiske beslutningstager (dvs. maximax kriteriet, (17)) ser investeringen overordentlig fordelagtig ud, idet den potentielt repræsenterer en kapitalværdi på knap 50 mio. Den pessimistiske beslutningstager (maximin kriteriet, (18)) kan se en kapitalværdi på ca. -40 mio. og vil hermed betragte investeringen som særdeles ufordelagtig. Både den bagkloge beslutningstager (minimax-regret kriteriet) og den risikoneutrale beslutningstager (Laplace kriteriet, (21)) vil se en fordelagtig investering. Begge kriterierne (20) og (22) giver ligeledes til resultat, at investeringen er fordelagtig.

Benyttes det modificerede Hurwitz' α-kriterium, Figur 5, ses at beslutningskriteriet er positivt for alle tre foreslåede indices I op til værdier af α på omkring 0,6. Med det konkrete eksempel ser resultaterne med de tre indices ikke så forskellige ud, men alle tre kurver afviger positivt fra en ret linie. For I = c lægges der størst vægt på midterværdien af den usikre kapitalværdi, for I = (a+2c+b)/4 mindre vægt og for I = intervalmidtpunktet ingen vægt.

Selvom kalkulen baseret på *tre-dobbelte estimater* for det betragtede investeringseksempel (Tabel 2) indeholder mange tal, er kalkulens budskab relativt let kommunikérbart, idet repræsentationen af de usikre økonomiske størrelser fremstår som en let forståelig udvidelse i forhold til de ordinære tal, som anvendes i konventionelle kalkuler. Den praktiske nytte af en sådan kalkule står og falder naturligvis med kvaliteten af de foretagne vurderinger af de indgående usikkerheder. Det kan være overraskende, at den resulterende usikkerhed på eksemplets kapitalværdi er så relativ stor. Man skal her huske på, at der indgår mange størrelser i kalkulen og at der er usikkerheder på dem alle. I praksis er der altså meget, der kan gå galt og godt, men en investering af den aktuelle karakter (produkt- og produktionsudvikling) overlades ikke til sig selv, når beslutningen er taget, der er behov for at følge op i hele projektets levetid. Eksemplet antyder og-

Figur 5. Anvendelse af det modficerede Hurwitz' α-kriterium med forskellige indices I.



så, at der måske kunne være behov for at søge nogle af de indgående økonomiske størrelser afklaret nærmere med henblik på evt. at reducere usikkerhederne.

Diskussion og konklusion

Vi har i artiklen forsøgt at give en samlet og systematisk fremstilling af repræsentation, kalkulation og beslutningstagning under økonomisk *usikkerhed* ved anvendelse af *intervaller* og *fuzzy tal*, mere specielt *triangulære fuzzy tal* simplificeret til *tre-dobbelte estimater*. Anvendelsen af de foreslåede fremgangsmåder er blevet demonstreret ved praktiske eksempler på investeringsbeslutninger under usikkerhed og der foreligger således dokumentation for, at metoderne er i stand til, ud fra givne usikre data, at kalkulere resultater, der på stringent vis holder styr på de resulterende usikkerheder. De klassiske rationelle beslutningskriterier under hensyntagen til beslutningstagerens risikopræference er blevet udvidet til at gælde for *intervaller* og *tre-dobbelte estimater*. Der er således hermed tilvejebragt et nyt teoretisk og metodisk grundlag for at håndtere rationelle beslutningsprocesser under økonomisk usikkerhed.

En af fordelene ved de foreslåede fremgangsmåder er, at de fremstår som en naturlig og let forståelig udvidelse af konventionelle økonomiske beslutningsprocesser, der anvender ordinær repræsentation af økonomiske størrelser, dvs. almindelige tal. Det betyder, at barriererne for praktisk anvendelse i den forstand er lave. Desuden indebærer den systematiske repræsentation og håndtering af usikkerheder, at der kan skabes en nyt kommunikationsmedie mellem forskellige faggrupper, f.eks. økonomer og ingeniører, når usikre forudsætninger for økonomisk begrundede beslutninger skal belyses. For realinvesteringer bør de i denne artikel foreslåede beslutningskriterier ikke stå alene, med mindre alle øvrige forhold, så som virksomhedens fleksibilitet og reaktionsmuligheder over for kommende trusler, investeringens alternative anvendelse osv., er kapitaliseret i forhold til beslutningstagerens nytteværdi.

Vil de foreslåede metoder i praksis føre til "bedre" økonomisk begrundede beslutninger, f.eks. i forbindelse med investeringer? Dette spørgsmål påtager artiklen sig ikke at besvare. Lige som kvaliteten af ordinære investeringskalkuler afhænger af begivenheder og forløb, der endnu ikke har fundet sted, således også kvaliteten af usikkerhedsvurderinger. Metoderne tilbyder imidlertid muligheder for at repræsentere, kalkulere og træffe beslutninger på en måde, der gør det muligt at overskue og forstå de komplekse data i forbindelse med usikkerheder og dermed også forbedre mulighederne for dialog og diskussion af konsekvenserne heraf. I den forstand er der åbnet mulighed for at forbedre beslutningsprocesserne.

Summary

The article introduces intervals and fuzzy numbers as an efficient and arithmetically stringent representation of economic uncertainties. The four basic arithmetical operations for such economic uncertainties are demonstrated and discussed, as well as economic calculations with uncertain functions, and connected problems. The ranking of economic uncertainties is related to classical economic decision theory. It is demonstrated in the article that conventional economic calculations can be easily expanded to include relevant uncertainty calculations to support rational decision processes. The results are shown in typical applications within a well-known economic problem area such as investment decisions.

Litteratur

Caprani, O. og K. Madsen: *Introduktion til interval analyse.* Rapport NI-92-03. Institut for Matematisk Modellering, Danmarks Tekniske Universitet. Lyngby, 1992.

Chen, S.-.J and C.L. Hwang: *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making,* Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1992.

Chiu, C.U. and C.S. Park: *Fuzzy cash flow analysis using present worth criterion.* The Engineering Economist, Vol. 39, No. 2, pp. 113-138, 1994.

Dosi, G. and M. Egidi: *Substantive and procedural uncertainty.* Journal of Evolutionary Economics. Vol. 1, No. 2, pp. 145-168, 1991.

Dubois, D. and H. Prade: *Operations on fuzzy numbers.* International Journal of System Science, Vol. 9, pp. 613-626, 1978.

Dubois, D. and H. Prade: *Fuzzy real algebra: Some results.* Fuzzy Sets and Systems, Vol. 2, pp. 327-348, 1979.

Hansen, E.: *Global Optimization Using Interval Analysis.* Marcel Dekker, New York, USA, 1992.

Hertz, D.B.: *Risk analysis in capital investment.* Harvard Business Review, January/February, pp. 95-106, 1964.

Hyvönen, E. and S. de Pascale: *Interval Solver 97 for Microsoft Excel.* Delisoft LtD., Helsinki, Finland, 1997. (Foreligger også som Interval Solver 2000, version 4.0).

Hyvönen, E. and S. de Pascale: *A new basis for spreadsheet computing: Interval Solver for Microsoft Excel.* Proceedings of the 11th innovative applications of artificial intelligence (IAAI-99), AAAI Press, Menlo Park, California, 1999.

Kaufmann, A. and M.M. Gupta: *Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science.* Elsevier Science Publishers B.V., 1988.

Knight, F.H.: *Risk, Uncertainty, and Profit.* Boston, Houghton Mifflin, 1921.

Kyläheiko, K.: *Coping with technology: A study on economic methodology and strategic management of technology.* Lappeenranta University of Technology, Finland, 1995.

Luce, R.D. and H. Raiffa: *Games and Decisions.* John Wiley and Sons, New York, USA, 1957.

Moore, R. E.: *Interval arithmetic and automatic error analysis in digital computing.* Ph.D. dissertation, Stanford University, October, 1962.

Moore, R. E.: *Interval Analysis.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1966.

von Neumann, J. and O. Morgenstern: *Theory of Games and Economic Behaviour.* Princeton University, USA, 1944.

Schjær-Jacobsen, H.: *A new method for evaluating worst-and best-case (WBC) economic consequences of technological development.* International Journal of Production Economics, Vol. 46-47, pp. 241-250, 1996.

Schjær-Jacobsen, H.: *Handling economic risks and uncertainties of production technology investments*. Proceedings of the 14th International Conference on Production Research, Osaka, Japan,. Vol. 1, pp. 346-349, 1997.

Schjær-Jacobsen, H.: *Representation and calculation of economic uncertainties - intervals, fuzzy numbers, and probabilities*, Proceedings of the Eleventh International Working Seminar on Production Economics, Igls/Innsbruck, Austria, Vol. 2, pp. 363-377, 2000.

Thuneby, J.: *Intervalanalytisk behandling af økonomiske usikkerheder*: Eksamensprojekt. IMM-EKS-1996-23. Institut for Matematisk Modellering, Danmarks Tekniske Universitet. Lyngby, 1996.

Wang, M.-J. and G.-S. Liang: Benefit/cost analysis using fuzzy concept. *The Engineering Economist*, Vol. 40, No. 4, pp. 359-376, 1995.

Zadeh, L.A.: Fuzzy sets. *Information and Control*, Vol. 8, pp. 338-353, 1965.

Zadeh, L.A.: The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning, *Information Sciences*, Vol. 8, part I, pp. 199-249, part II, pp. 301-357, 1975.